# Divide-and-Conquer Approximation Algorithms via Spreading Metrics

Guy Even, Joseph Naor, Satish Rao,
Baruch Schieber

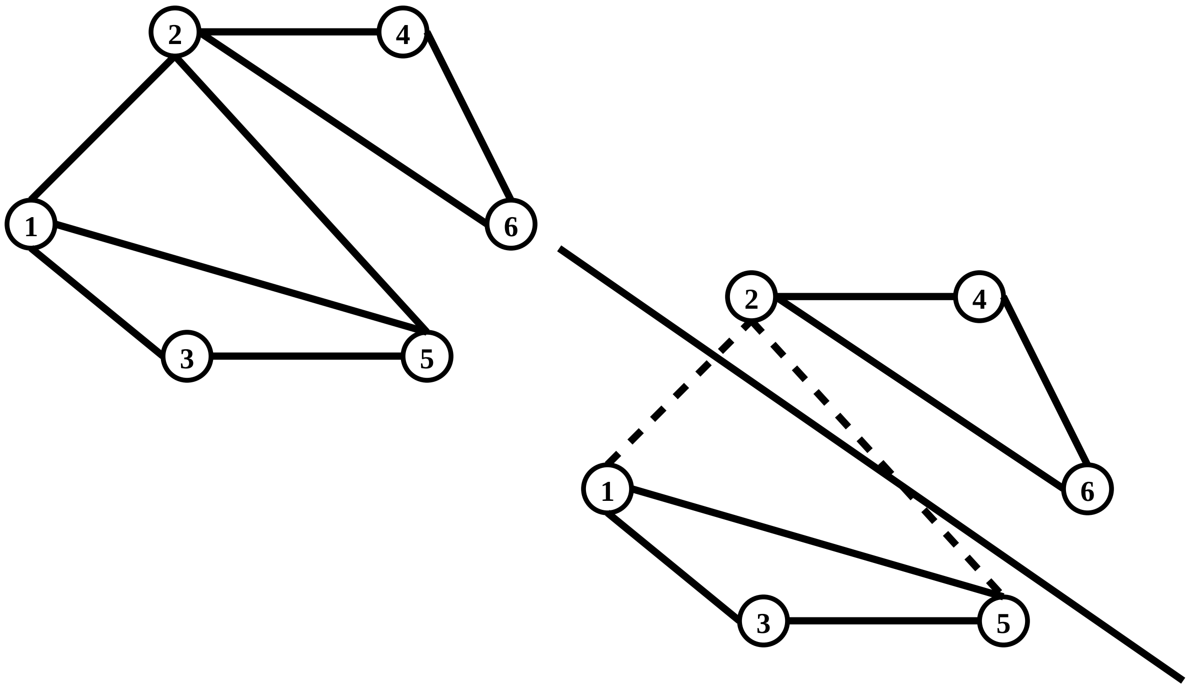
# Divide and Conquer

**Idee:** Ist das Problem zu groß, so

1. Zerteile es in kleinere Teilprobleme
2. Löse Teilprobleme unabhängig voneinander
3. Setze Teillösungen zusammen

- Teilung kann rekursiv fortgesetzt werden bis Probleme trivial sind.
- Aber: Falls Teilprobleme *nicht* unabhängig, so treten in Schritt (2) Fehler auf, die in (3) kompensiert werden müssen.

# Divide and Conquer auf Graphen

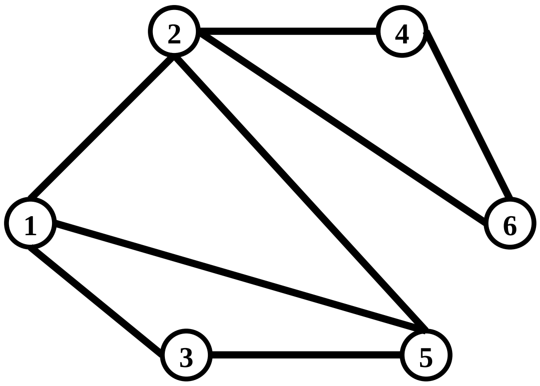


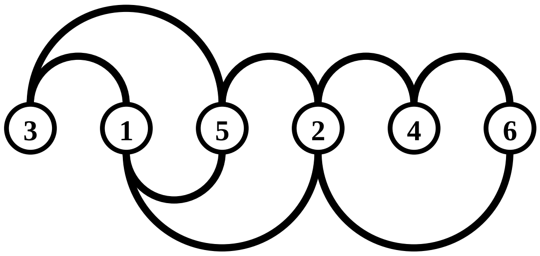

- Entferne Kanten, so daß der Graph in zwei oder mehr Teilgraphen zerfällt.

- Löse Problem (rekursiv) auf Teilgraphen.

- Setze Teillösungen unter Rücksicht auf die bislang ignorierten Kanten zusammen.

# Linear Arrangement

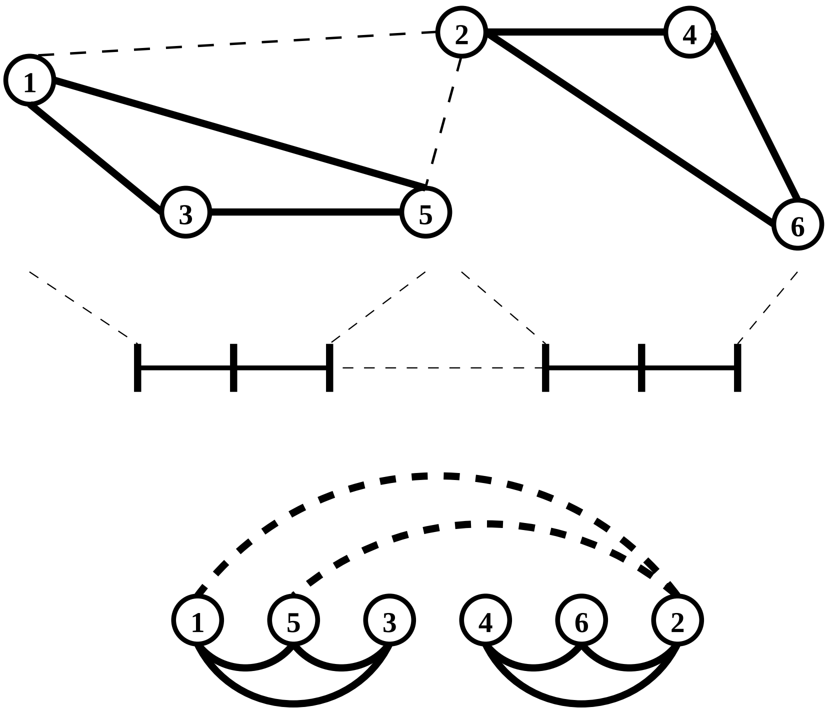



- Abbildung der Knoten auf äquidistante Punkte unter Minimierung der Summe der Kantenlänge.

- Finden der optimalen Lösung (oben: 11) ist NP-Hart.

# Linear Arrangement mit Divide and Conquer




- Die optimale Lösung wird nicht gefunden (hier: 17).

- Aber: der Fehler kann abgeschätzt werden: je durchgeschnittene Kante max. $|V| - 1$ Abweichung von optimaler Lösung $\Rightarrow$ Approximationsalgorithmus!

# Approximation von Linear Arrangement

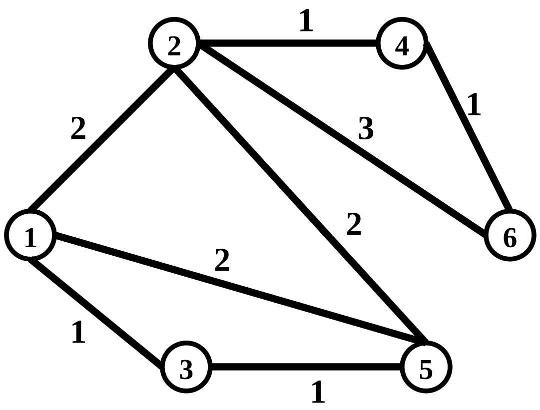
**Satz:** Wird ein Graph unter Teilung *möglichst weniger* Kanten in nichttriviale Teile zerlegt, so ist Linear Arrangement auf Faktor $O(\log n)$ approximierbar.

- Leider: „min-cut“-Problem ist ebenfalls NP-hart!

- Leighton, Rao: Approximation von min-cut auf $O(\log n)$

- Damit Approximation von Linear Arrangement auf $O(\log^2 n)$

# Spreizmetrik




**Def:** Eine *Spreizmetrik* ist eine Funktion $l : E \to Q$ die jeder Kante eines Graphen eine rationale Länge zuordnet.

**Def:** Das Volumen einer Spreizmetrik ist definiert als die Summe aller Kantenlängen $\text{vol}(G) = \sum_{e \in E} l(e)$.

**Def:** Der Abstand zweier Punkte $\text{dist}(u, v)$ ist die Länge des kürzesten Pfades zwischen $u$ und $v$ gemäß der Spreizmetrik.

# Forderungen an die Spreizmetrik

- Das Volumen der Spreizmetrik sei eine untere Schranke für die Kosten der optimalen Lösung des Problems.

- In jedem zusammenhängenden Teilgraphen $H \subseteq G$ gibt es zwei Punkte $u$, $v$, so daß $\text{dist}(u, v) \geq |V_H| - 1$.

**Idee:** Divide and Conquer-Algorithmus unter Abschätzung des „Volumens“ ergibt Approximation des Linear Arrangements.

# Die Cut-Prozedur

Der Cut cut$(u, r)$ trennt alle Kanten im Abstand $r$ von $u$. Der Teilgraph $C = (V_C, E_C) \subseteq G$ ist die Beschränkung von $G$ auf diese Umgebung, $C = G \cap U_r(u)$.

Volumen des Cut:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(C) &= \sum_{e \in E_C} l(e) + \\ &\qquad \sum_{\left\{ \substack{e=(x,y)\in E \\ x \in V_C, y \notin V_C} \right\}} (r - \mathrm{dist}(u, x)) \end{aligned}$$

Die Kapazität eines Cut $c(C)$ ist die Anzahl der durchgeschnittenen Kanten.

# Cut-Lemma

Sei $G = (V, E)$, und seien $u$ und $v$ Knoten mit $\Delta = \mathrm{dist}(u, v) \geq |V| - 1$.

**Satz:** Dann existiert r-Umgebung $U_r(u)$ mit $\frac{\Delta}{4} \leq r \leq \frac{\Delta}{2}$, so daß für den Cut $C = \mathrm{cut}(u, r)$ gilt

$$c(C) \leq \frac{8\mathrm{vol}(C)}{|V| - 1} \ln \left( \frac{4\mathrm{vol}(G)}{\mathrm{vol}(C)} \right) \ln \ln \left( 8\mathrm{vol}(G) \right)$$

**Hintergrund:** Abschätzung des Fehlers $(|V| - 1)c(C)$ *in Bezug auf* die Größe $\mathrm{vol}(C)$ des abgespaltenen Teilproblems.

# Berechnung der Spreizmetrik

Gegeben: Graph $G = (V, E)$. Löse lineares Programm:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{e \in E} l(e) \\ \text{s.t.} & \forall e \in E : l(e) \geq 0 \\ & \forall U \subseteq V, \forall v \in U : \\ & \sum_{u \in U} \text{dist}(u, v) \geq \frac{1}{4}(|U|^2 - 1) \end{array}$$

Exponentiell viele Nebenbedingungen! Aber: Lösung mit Ellipsoidalgorithmus in Polynominalzeit möglich.

# Verallgemeinerungen

- Ordne jeder Kante eine „Kapazität“ $c(e)$ zu. Volumen einer Kante vol$(e) = c(e)l(e)$.

- Beschränke Betrachtung auf „interessante Kanten“ $F \subseteq E$.

- Schätze den Fehler einer durchschnittenen Kante über allgemeine Funktion $f(G)$ als $c(e)f(G)$ ab.

- Auch möglich: vertausche Rollen von Knoten und Kanten.

# Beweisskizze: Cut-Lemma

**Satz:** (Differenz-Lemma): Sei $\{a_i\}_{i=1}^{l}$ eine streng monoton steigende Zahlenfolge mit $0 < a_1$ und $a_l < 1$. Dann gibt es einen Index $i$, so daß

$$a_{i+1} - a_i < \frac{a_{i+1}}{l-1} \ln\left(\frac{e \cdot a_l}{a_{i+1}}\right) \ln\ln\left(\frac{e \cdot a_l}{a_1}\right)$$

**Auch bekannt:** Falls maximal ein Punkt zwischen $r_2$ und $r_1$, dann gilt

$$\mathrm{vol}(r_2) - \mathrm{vol}(r_1) \geq \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot c(\mathrm{cut}(r_2))$$

Cut-Lemma ergibt sich durch Anwendung des Differenz-Lemmas auf Folge $\mathrm{vol}(r_i)$.