Vierpolketten

Frank Pilhofer Kay Römer

24. Februar 1997

Zusammenfassung

In diesem Versuch wird die Wellenausbreitung in verschiedenen elektrischen Schaltungen untersucht. Am Eingang mit einer hochfrequenten Wechselspannung angeregt, wird der Spannungsverlauf am Ausgang gemessen.

Untersucht werden Koaxialleitungen, elektrische Filter und Hohlleiter.

1 Grundlagen

1.1 Vierpole

Vierpole sind die "Black Boxes" der Elektrotechnik. Ein Vierpol hat ein Eingangstor und ein Ausgangstor (je zwei Klemmen oder Pole). Die Vierpoltheorie beschreibt das Verhalten am Ausgangstor als Funktion der Anregung am Eingangstor. Ist das Verhalten eines Vierpols bekannt, so kann auch das Verhalten einer aus Vierpolen zusammengesetzten Schaltung, z.B. einer Kettenschaltung, beschrieben werden.

Das allgemeine Modell eines Vierpols ist in Abbildung 1 dargestellt. Enthält ein Vierpol Energiequellen, so nennt man ihn aktiven Vierpol (z.B. Verstärker), ansonsten passiven Vierpol. Besteht zwischen Strömen und Spannungen ein komplex linearer Zusammenhang ($U = Z \cdot I$, alle Größen komplex), so spricht man von einem linearen Vierpol. Im weiteren werden nur lineare, passive Vierpole betrachtet.

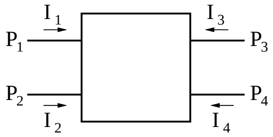

Abbildung 1: Vierpol

Unter der Voraussetzung des linearen Zusammenhangs zwischen Strom und Spannung können folgende Beobachtungen gemacht werden.

- Ist kein Stromfluß vorhanden, so sind die Potentiale an den vier Klemmen einander gleich.
- Die Potentiale lassen sich als lineare Funktionen der Ströme darstellen.
- Aufgrund der Kirchhoff'schen Regel und der Voraussetzung, daß ein *passiver* Vierpol keine Energiequellen enthält, gilt $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$.

Definieren wir das Potential an der rechten unteren Klemme auf 0, also $P_4 = 0$, so ist auch $I_4 = 0$ und die Potentiale lassen sich als lineare Funktion

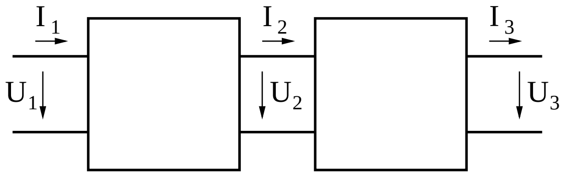

Abbildung 2: Vierpolkette

der Ströme wie folgt schreiben.

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 \\ w_{21} & w_{22} & w_{33} & 0 \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zwei Klemmen (1 und 2) können als Eingangsklemmen definiert werden, die anderen beiden als Ausgangsklemmen (3 und 4). Daraus ergibt sich $I_1 = -I_2$ und $I_3 = -I_4$. Weiter wird von den Potentialen zu den Spannungen der Eingangs- und Ausgangsklemmen übergegangen, $U_1 = P_1 - P_2$ und $U_2 = P_3 - P_4$. Unter Einsetzen der Potentialfunktionen von oben erhalten wir

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} - w_{12} - w_{21} + w_{22} & w_{13} - w_{23} \\ w_{31} - w_{32} & -w_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Mit entsprechenden Umformungen können die Ausgangsparameter U_2 und I_2 als Funktion der Eingangsparameter U_1 und I_1 dargestellt werden. Im folgenden werden wir die Hilfsparameter w_{nm} nicht weiter benötigen; wir definieren uns neue Parameter B_{nm}, so daß der einfache Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

gilt. Aus diesem Zusammenhang läßt sich auch ablesen, wie sich die Parameter B_{nm} experimentell bestimmen lassen:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{U_2}{U_1} && \text{bei offenem Eingang } (I_1 = 0) \\ B_{21} &= \frac{I_2}{U_1} && \text{bei offenem Eingang } (I_1 = 0) \\ B_{12} &= \frac{U_2}{I_1} && \text{bei kurzgeschlossenem Eingang } (U_1 = 0) \\ B_{22} &= \frac{I_2}{I_1} && \text{bei kurzgeschlossenem Eingang } (U_1 = 0) \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise läßt sich jede Kombination von zwei Parametern als lineare Funktion der anderen beiden Parameter ausdrücken. Für unsere Zwecke hat diese „B-Form“ aber den Vorteil, daß sich Reihenschaltungen von Vierpolen wie in Abbildung 2 leicht berechnen lassen. Denn es ist

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = B_2 \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

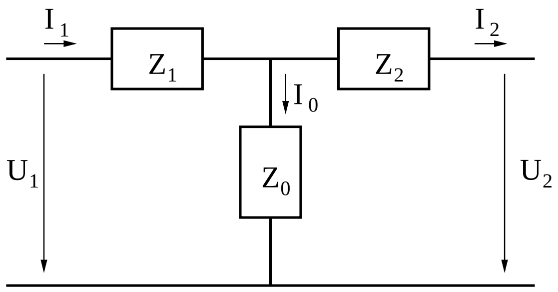

Abbildung 3: T-Ersatzschaltbild

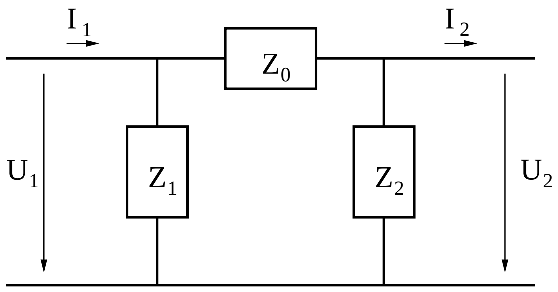

Abbildung 4: Π-Ersatzschaltbild

Die internen Spannungen und Ströme der Kette brauchen daher gar nicht bekannt zu sein, die Vierpolmatrix der Kette berechnet sich aus der Matrixmultiplikation der einzelnen Vierpolmatrizen.

$$\begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = B_1 B_2 \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

1.2 Ersatzschaltungen

Jeder passive Vierpol kann durch ein T- oder ein Π-Ersatzschaltbild dargestellt werden (siehe Abbildungen 3 und 4). Beide Ersatzschaltungen sind aus drei (komplexen) Widerständen aufgebaut. Aus den Kirchhoff'schen Regeln und dem Ohmschen Gesetz folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 + I_2 \\ U_1 &= Z_1 I_1 + Z_0 I_0 \\ U_2 &= -Z_2 I_2 + Z_0 I_0 \end{aligned}$$

Der innere Wert für I_0 läßt sich eliminieren. Durch Auflösung nach U_2 und I_2 in Abhängigkeit von den Eingangswerten ergibt sich die B-Matrix der T-Schaltung als

$$B_T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_0} & -(Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0}) \\ -\frac{1}{Z_0} & 1 + \frac{Z_1}{Z_0} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Eine analoge Rechung für die Π-Schaltung ergibt

$$B_\Pi = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_0}{Z_1} & -Z_0 \\ -(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{Z_0}{Z_1 Z_2}) & 1 + \frac{Z_0}{Z_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

1.3 Wellenausbreitung in Vierpolen

Bei der Wellenausbreitung in Verpolketten sind alle Ströme und Spannungen an den Klemmen eines Vierpols zeitabhängige komplexe Funktionen und die Elemente der Vierpolmatrix frequenzabhängige komplexe Zahlen.

Wird eine unendlich lange Kette von Vierpolen betrachtet, so sind alle Zellen gleichberechtigt: am Ausgang schließen sich unendlich viele Vierpole an. An den Ausgangsklemmen jedes Vierpols ist demnach ein identischer Ausgangswiderstand angeschlossen. Daraus folgt, daß auch der Eingangswiderstand $Z = \frac{U_i}{I_i}$ jeweils kostant ist. Ist aber der Quotient $\frac{U_i}{I_i}$ konstant, so unterscheiden sich die Spannungen und Ströme in aufeinanderfolgenden Zellen um jeweils einen konstanten Faktor.

Den gleichen Zustand erhalten wir, wenn wir am Ausgang eines Vierpols eine unendlich lange Kette „simulieren", indem wir am Ausgang einen entsprechenden *Abschlußwiderstand* mit dem spezifischen Wellenwiderstand des Vierpols anschließen. Geschieht dieser Abschluß nicht, so werden die Wellen am Ausgang reflektiert und die eingehende Welle überlagern, was bei einer unendlichen Kette nicht möglich wäre, das obige Gedankenspiel wäre gestört.

In diesem Fall eines idealen Abschlusses erhalten wir also $U_2 = \xi U_1$ und $I_2 = \xi I_1$. Nichtsdestotrotz können wir aber immer noch das Verhalten des Vierpols mittels der Vierpolmatrix beschreiben.

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Aus der Äquivalenz folgt

$$\begin{pmatrix} B_{11} - \xi & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} - \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, wenn der Rang der Matrix ungleich 2 bzw. die Determinante zu 0 wird. Daraus folgt

$$\begin{aligned} (B_{11} - \xi)(B_{22} - \xi) - B_{12}B_{21} &= 0 \\ \xi^2 - (B_{11} + B_{22})\xi + B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} &= 0 \\ \xi^2 - (B_{11} + B_{22})\xi + \mathrm{Det}B &= 0 \qquad (10) \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, kann jeder passive Vierpol durch eine T- oder Π-Ersatzschaltung dargestellt werden. Wie man an Gl. 6 und 7 leicht überprüfen kann, gilt daher für jeden passiven Vierpol $\mathrm{Det}B = 1$. In Gl. 10 eingesetzt, ergibt sich

$$\xi^2 - (B_{11} + B_{22})\xi + 1 = 0$$

$$\xi = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(B_{11} + B_{22})^2}{4} - 1} \tag{11}$$

Wir definieren

$$F(\omega) = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} \tag{12}$$

und substituieren

$$\cosh\psi = F(\omega) = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} \tag{13}$$

erhalten wir

$$\xi = \cosh\psi \pm \sqrt{\cosh^2\psi - 1} = e^{\pm\psi}. \tag{14}$$

Um diesen Faktor unterscheiden sich Spannung und Strom am Ausgang von den Werten am Eingang. Die verschiedenen Vorzeichen stehen für die zwei möglichen Laufrichtungen der Welle. Dabei ist ψ im allgemeinen ein komplexer Wert $\psi = \alpha + i\beta$. Er wird das *Übertragungsmaß* des Vierpols genannt.

Wird also an den Eingang des Vierpoles eine sinusförmige Wechselspannung

$$U_1(t) = \hat{U}_1 e^{i\omega t}$$

angelegt, so erhalten wir am Ausgang

$$U_2(t) = e^{\psi} U_1(t) = e^{\alpha} \hat{U}_1 e^{i(\beta + \omega t)} \tag{15}$$

Am Ausgang sehen wir also eine Welle gleicher Frequenz, allerdings ist die Phase um den Winkel β verschoben und die Amplitude um den Faktor e^{α} gedämpft.

Mit Hilfe von Gleichung 13 können wir aus den Vierpolparametern direkt Dämpfung und Phasenverschiebung des Vierpols berechnen.

$$\psi = \cosh^{-1}\frac{B_{11} + B_{22}}{2} \cosh^{-1} F(\omega) \tag{16}$$

An dieser Stelle hilft es, die Definition des cosinus hyperbolicus zu kennen.

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix) \tag{17}$$

und daher ist, unter Verwendung der etwas besser bekannten cosinus- und Exponentialfunktion

$$\cosh\psi = \cos(i\psi) = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} \tag{18}$$

$$\psi = -i\cos^{-1}\frac{B_{11} + B_{22}}{2} \tag{19}$$

$$e^{\psi} + e^{-\psi} = \frac{B_{11} + B_{22}}{2} \tag{20}$$

Wir erkennen:

- Ist $-1 \leq F(\omega) \leq 1$, so ist nach Gleichung 19 der Arcuscosinus dieses Wertes reell und ψ rein imaginär. In diesem Bereich stellt der Vierpol nur einen Blindwiderstand dar. Die Welle wird ohne Dämpfung, aber mit Phasenverschiebung übertragen. Dies ist der *Durchlaßbereich* des Vierpols.
- Ist $F(\omega) > 1$, so läßt sich Gleichung 20 für ein reelles ψ lösen. Die Welle erfährt keine Phasenverschiebung, wird aber gedämpft. Die Dämpfung ist umso stärker, je größer $F(\omega)$ ist.
- Die Ungleichung $F(\omega) < -1$ läßt sich nur mit einem komplexen ψ lösen, wobei der Imaginäranteil $\mathrm{Im}\psi = \pm\pi$ ist, denn $\cosh(x \pm i\pi) = -\cosh(x)$. Die Welle erfährt eine Phasenverschiebung von $\pm\pi$ (vorwärts oder rückwärts) sowie eine Dämpfung.

Die graphische Darstellung der Abhängigkeit zwischen Frequenz und Phasenverschiebung wird *Brillouin-Diagramm* genannt.

1.4 Vierpolketten

Laut Gleichung 5 berechnet sich die Vierpolmatrix einer Reihenschaltung von Vierpolen als Matrizenmultiplikation der Vierpolmatrizen der „Bausteine“. Im Falle einer homogenen Vierpolkette können wir nun eine weitere wichtige Aussage machen. Bei Hintereinanderschaltung zweier Glieder gilt

$$U_2 = e^{\psi} U_1, \qquad U_3 = e^{\psi} U_2 = e^{2\psi} U_1$$

Das Übertragungsmaß verhält sich also additiv, und auch dessen Komponenten, α und β addieren sich. Zu beachten ist, daß sich die Dämpfung, wenn sie als Quotient der Ausgangsspannung und der Eingangsspannung angegeben wird, multiplikativ verhält. Ein in Dezibel angegebener Wert für die Dämpfung ist aber wiederum additiv.

Wie erwähnt gilt diese Formel nur für die Verkettung homogener Vierpole. Wir erinnern uns – wir arbeiten unter der Voraussetzung, daß wir uns entweder in einer unendlichen homogenen Kette befinden, oder daß der Ausgang des Vierpols mit einem entsprechenden Abschlußwiderstand beschaltet ist, der eine unendlich lange Kette „simuliert“. Werden unterschiedliche Vierpole verkettet, so ist diese Annahme mindestens für einen Vierpol verletzt.

1.5 Messen und Kalibrieren

Zur Messung stehen ein Frequenzgenerator und ein Vektorvoltmeter zur Verfügung, mit denen bei Frequenzen im Bereich von 100kHz bis 1GHz Amplitudendämpfung und Phasenverschiebung direkt gemessen werden können. Beide Geräte werden über Computerprogramme gesteuert, so daß bequem Meßwerte in genügender Anzahl aufgenommen werden konnten.

Doch gerade bei diesen hohen Frequenzen ist der Einfluß des Meßsystems nicht vernachlässigbar. Da sich die Wellenlänge der elektrischen Wellen hier nur im Meterbereich bewegt, entstehen allein durch die Kabelwege der Meßköpfe bis zum Meßgerät Phasenverschiebungen. In nicht idealen Kabelwegen entsteht weitere Dämpfung und Phasenverschiebung. Weiter entstehen durch nicht optimal angepaßte Abschlußwiderstände Reflexionen an den Kabelenden, die sich den Meßwerten überlagern. Existieren Reflexionen an beiden Enden (Eingang und Ausgang), so enstehen Resonanzen. Bei Unregelmäßigkeiten innerhalb eines Kabels können selbst innerhalb eines Meßkabels Reflexionen und mögliche Resonanzen entstehen. Ein besonders paranoider Versuchsleiter wird während einer Messung noch nicht einmal die räumliche Orientierung der Kabel untereinander verändern, in der Furcht, daß sich Impedanzen zwischen Kabelschleifen verändern.

Um den Einfluß des Meßsystems möglichst wieder zu eliminieren, wird vor jeder Messung eine *Kalibrierung* durchgeführt. Dabei werden Eingang und Ausgang (ohne Kabelweg!) kurzgeschlossen und eine Meßreihe aufgenommen. Anschließend wird das Meßobjekt zwischen Eingang und Ausgang geschaltet; von den so aufgenommen Werten werden die Werte der ersten Meßreihe subtrahiert.

Als Abschlußwiderstände werden bei uns durchgehend 50Ω-Widerstände verwendet. Da sich der Wellenwiderstand der Vierpole mit der Frequenz ändert, müßte ein optimaler Abschluß für jede einzelne Messung neu bestimmt werden – ein Prozeß, der wahrscheinlich fehlerträchtiger ist als ein durchgehend nicht ganz so optimaler Abschlußwiderstand.

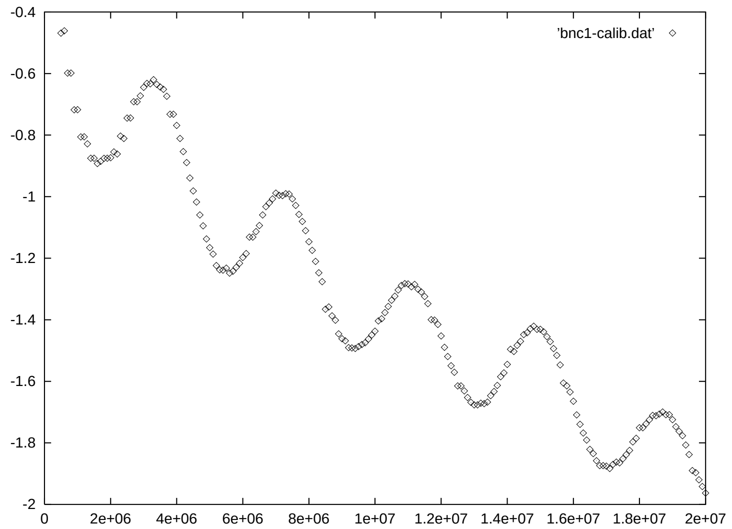

Abbildung 5: Dämpfungsmaß eines BNC-Kabels im Bereich von 0 bis 20MHz

2 Koaxialleitungen

Auch Koaxialleitungen können als Vierpol betrachtet werden. Am Eingang wird zwischen Außenleiter und Mittelleiter eine Wechselspannung angelegt, die vom Kabel an den Ausgang übertragen wird. Im Alltagsleben geht man davon aus, daß die Signale vom Kabel unverfälscht übertragen werden, doch zeigt die Praxis, daß dem nicht so ist. Außen- und Mittelleiter bilden einen Kondensator, der abhängig von der Frequenz die übertragenen Signale beeinflussen kann.

Das wird mit zunehmender Frequenz zum Problem. In der Datentechnik sollen binäre Daten, also rechteckige Impulse, störungsfrei übertragen werden. Ein rechteckiger Impuls besteht laut Fourier aus einer sinusförmigen Grundwelle und bestimmter Oberwellen. Hängt das Dämpfungsmaß und die Phasenverschiebung des Kabels von der Frequenz der Welle ab, so werden Grundwelle und Oberwellen unterschiedlich verfälscht, die Qualität des Rechtecksignals am Ausgang leidet erheblich.

Wir wollen nun Dämpfungsmaß und Phasenverschiebung zweier Koaxialleitungen, eines handelsüblichen BNC-Kabels sowie eines hochwertigen N-Kabels, bestimmen. Wir erhoffen eine möglichst konstante und geringe Dämpfung und eine lineare Abhängigkeit der Phasenverschiebung von der Frequenz.

Letzeres resultiert daher, daß bei zunehmender Frequenz die Wellenlänge abnimmt. Da unser Tastkopf auf einen Punkt fixiert ist, „erwischt“ er die Welle in einer jeweils anderen Phase.

2.1 BNC-Kabel

BNC-Kabel werden häufig eingesetzt, so dienen sie vielfach zum Anschluß vom Meßköpfen an ein Oszilloskop, ein anderer Anwendungsbereich sind beispielsweise lokale Computernetze, in denen sie für „thin Ethernet“-Verkabelung eingesetzt werden. Dabei müssen sie Impulse von 10MHz über Strecken bis zu 500m transportieren können.

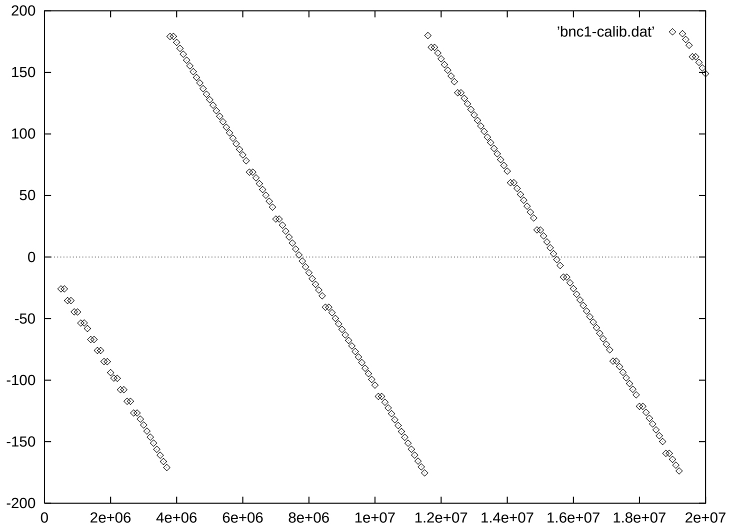

Abbildung 6: Phasenverschiebung eines BNC-Kabels im Bereich von 0 bis 20MHz

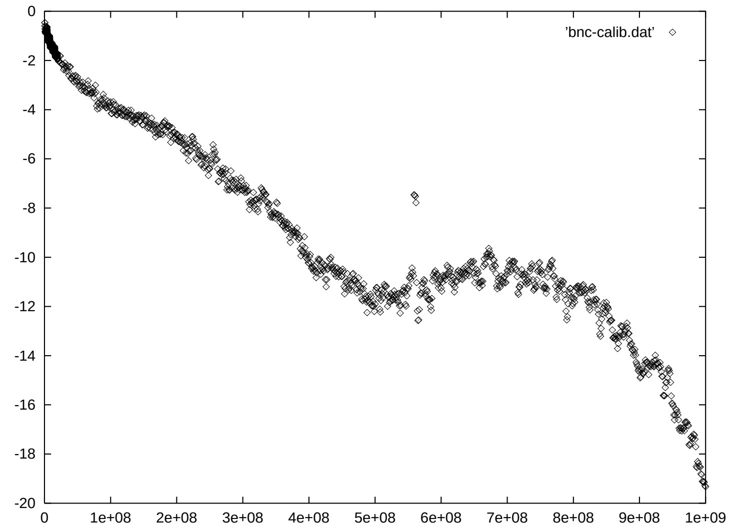

Abbildung 7: Dämpfungsmaß eines BNC-Kabels im Bereich von 0 bis 1GHz

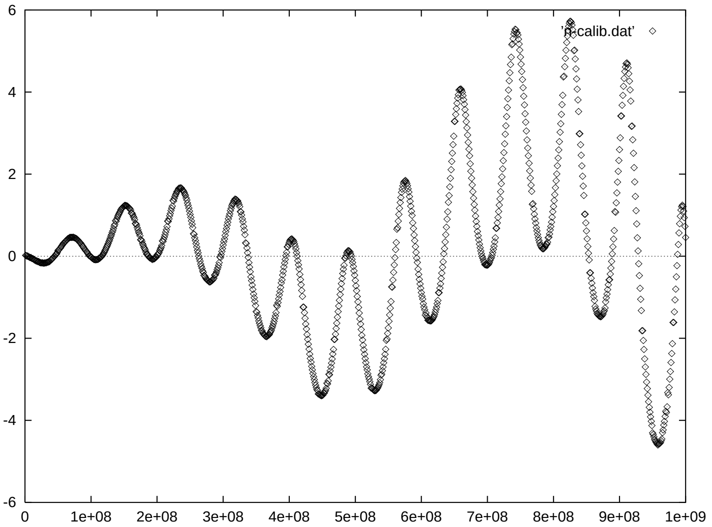

Abbildung 8: Dämpfungsmaß eines N-Kabels im Bereich von 0 bis 1GHz

Unser erstes Testobjekt ist ein auf eine Trommel aufgewickeltes BNC-Kabel unbekannter Länge (laut Aussage des Assistenten im Bereich 30-40 Meter). Abbildung 5 zeigt die Dämpfung des Kabels, Abbildung 6 die Phasenverschiebung im Bereich von 0 bis 20MHz.

Die Grafik für die Phasenverschiebung zeigt mit wenigen Ausreißern den gewünschten linearen Zusammenhang. Die Grafik der Dämpfung ist schon interessanter. Leicht andeutungsweise steigt die Dämpfung linear mit der Frequenz an, pendelt aber um diese Mittellinie herum. Dieses „Pendeln“ zeigt Maxima im Abstand von 4MHz. Unter der Annahme, daß die Abweichungen vom Mittel durch Reflexionen am Kabelende – dank nicht idealer Abschlüsse – handelt, stellen die Maxima eine Resonanz innerhalb des Kabels dar. Resonanzen treten auf, wenn die Länge des Kabels gerade ein Vielfaches der Wellenlänge oder noch eine Halbwelle länger ist. Aus dieser Beobachtung ergibt sich die elektrische Länge des Kabels aus $l = \frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{c}{\Delta f}$ als ungefähr 37.5 Meter.

Wir erkennen, daß die Dämpfung bei der „Ethernet-Frequenz“ ungefähr -1.5dB beträgt. Hochgerechnet auf eine Kabellänge von 500m beträgt die Dämpfung allein der Grundwelle bereits -20dB, ihre Amplitude ist bereits auf ein Zehntel geschrumpft.

Grafik 7 zeigt die Dämpfung im gesamten zur Verfüngung stehenden Frequenzbereich bis 1GHz. Der lineare Zusammenhang von Dämpfung und Frequenz bestätigt sich mehr oder weniger.

2.2 N-Kabel

Ein N-Kabel ist ebenfalls eine Koaxialleitung, aber deutlich hochwertiger als ein BNC-Kabel. Es ist explizit für Messungen im Hochfrequenzbereich gedacht; auch der Signalgenerator sowie die das Vektorvoltmeter in diesem Versuchsaufbau sind aus N-Kabeln gebaut. Das Testobjekt hat eine Länge von ungefähr einem Meter.

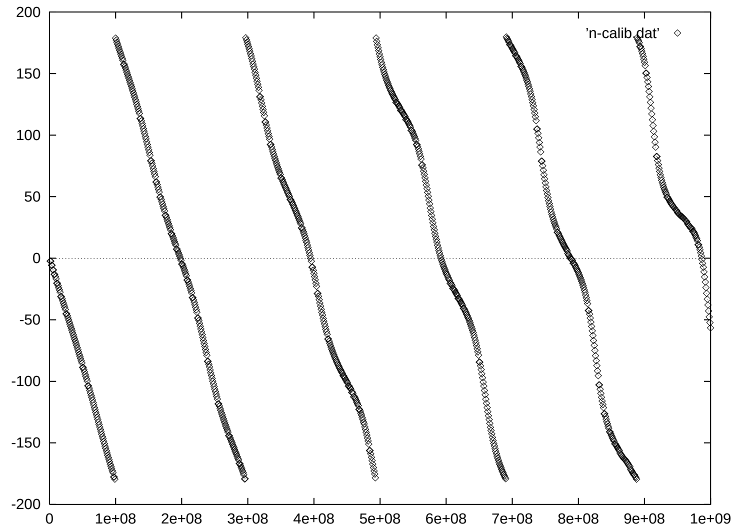

Abbildung 9: Phasenverschiebung eines N-Kabels im Bereich von 0 bis 1GHz

Abbildung 8 zeigt das Dämpfungsmaß, Abbildung 9 das Phasenmaß des N-Kabels im Frequenzbereich von 0 bis 1GHz.

Das Dämpfungsmaß pendelt im gesamten Frequenzbereich um die 0 Dezibel herum. Auch hier dürfte das Pendeln von Reflexionen und Resonanzen im Inneren des Kabels sowie von nicht angepaßten Abschlußwiderständen herrühren. Im Phasengang sind bereits echte Nicht-Linearitäten zu erkennen, insbesondere jenseits der 500MHz.

3 Elektrische Filter

Elektrische Filter sind spezielle Vierpole. Sie haben die Eigenschaft, daß sie nur Wellen bestimmter Frequenzen ungehindert passieren lassen, Wellen mit einer Frequenz außerhalb des „Durchlaßbereiches“ werden stark gedämpft. Wir betrachten den Tiefpaß, den Hochpaß und den Bandpaß.

Unsere Filter werden stets aus einer homogenen Vierpolkette aufgebaut sein. Der Sinn in der Verkettung liegt insbesondere darin, daß ein einzelnes Glied an der Grenze des Durchlaßbereiches nur eine geringe Dämpfung bewirkt. Mehrere Glieder hintereinander versteilern die „Schaltflanke“.

3.1 Tiefpaß

Ein Tiefpaß kann aus einer Reihe homogener Glieder aufgebaut werden (siehe Abbildung 10). Die Kette kann man sich aus einzelnen Vierpolen wie in Abbildung 11 aufgebaut denken. (In Reihe geschaltete Induktivitäten addieren sich.) Dies ist eine T-Schaltung gemäß Abbildung 3, die zugehörige B-Matrix des Vierpols können wir unter

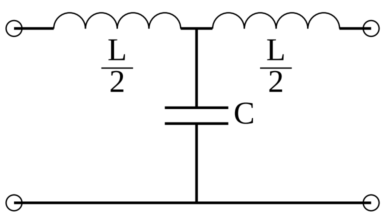

Abbildung 11: Einzelglied im Tiefpaß

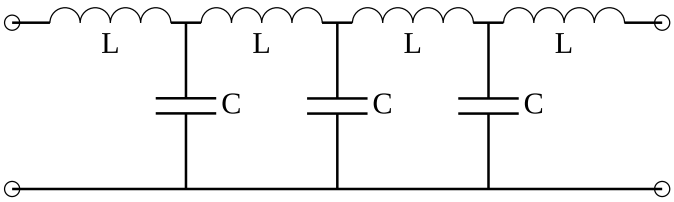

Abbildung 10: Tiefpaß

Verwendung von $Z_1 = Z_2 = \frac{1}{2}i\omega L$ und $Z_0 = \frac{1}{i\omega C}$ direkt aus Gleichung 6 ablesen.

$$B_T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC & -i\omega L(1 - \frac{1}{4}\omega^2 LC) \\ -i\omega LC & 1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC \end{pmatrix} \tag{21}$$

Für die Funktion $F(\omega)$ gilt daher

$$F(\omega) = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC \tag{22}$$

Laut der Forderungen aus Kapitel 1.3 muß für den Durchlaßbereich $-1 \leq F(\omega) \leq 1$ gelten. Unsere Funktion. Der obere Grenzwert ist für $\omega_1 = 0$ erreicht, für den anderen errechnet sich

$$F(\omega) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \tag{23}$$

Im Frequenzbereich von 0 bis ω_2 ist die Dämpfung daher Null. Jenseits von ω_2 steigt die Dämpfung an, und die Phasenverschiebung beträgt π. Tiefe Frequenzen dürfen ungehindert passieren, daher „Tiefpaß“.

Ausgemessen wurde eine Kette von 11 Vierpolen laut Abbildung 11. Die Hintereinanderschaltung identischer Vierpole bewirkt laut Kapitel 1.4 eine um den Faktor 11 vergrößerte Phasenverschiebung und zur 11. Potenz verstärkte Dämpfung (bzw. einen um den Faktor 11 so großen Wert in Dezibel).

Die Induktivität der Spulen ist mit L=6.8μH, die Kapazität der Kondensatoren mit C=33pF. Daraus berechnet sich nach Gleichung 23 die obere Grenzfrequenz zu f_2=21.2MHz. Soweit die Theorie.

Die Abbildungen 12 und 13 zeigen Dämpfungsmaß und Phasenmaß der gesamten Vierpolkette. Aus diesen Werten wurde auf die Parameter des einzelnen Vierpolgliedes zurückgerechnet (d.h. die Werte für Dämpfung und Phasenverschiebung durch 11 geteilt), und ein Brillouin-Diagramm (Abbildung 14) gezeichnet.

3.2 Hochpaß

Ein Hochpaß ist ähnlich wie ein Tiefpaß aus reinen Blindwiderständen, Spulen und Kondensatoren, aufgebaut (Abbildung 15). Analog kann man sich die Kette aus einer Anzahl einzelner Vierpole wie in Abbildung 16 aufgebaut denken, wobei sich hier die P-Schaltung gemäß Abbildung 4 anbietet. Auch hier kann man die B-Matrix des Vierpols sofort aus Gleichung 7 ablesen.

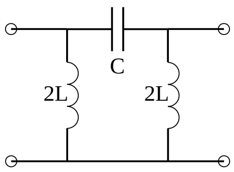

Abbildung 16: Einzelglied im Hochpaß

$$B_H = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2\omega^2 LC} & \frac{-1}{i\omega C} \\ \frac{-1}{i\omega L}(1 - \frac{1}{4\omega^2 LC}) & 1 - \frac{1}{2\omega^2 LC} \end{pmatrix} \tag{24}$$

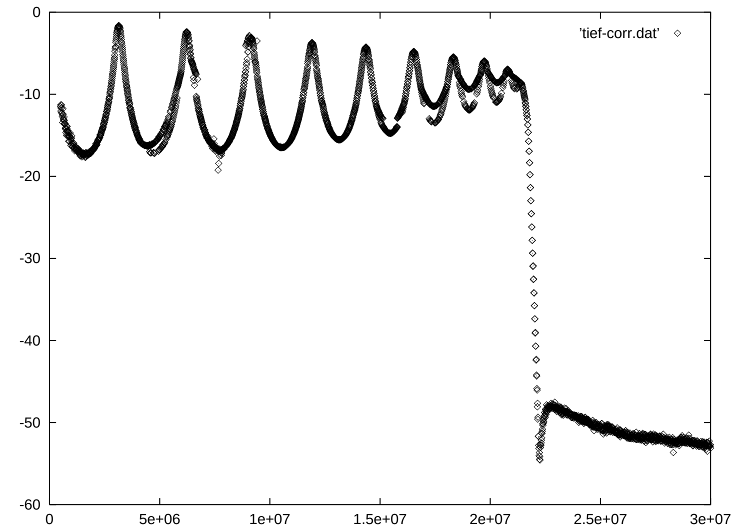

Abbildung 12: Dämpfungsmaß des Tiefpasses im Bereich bis 30MHz

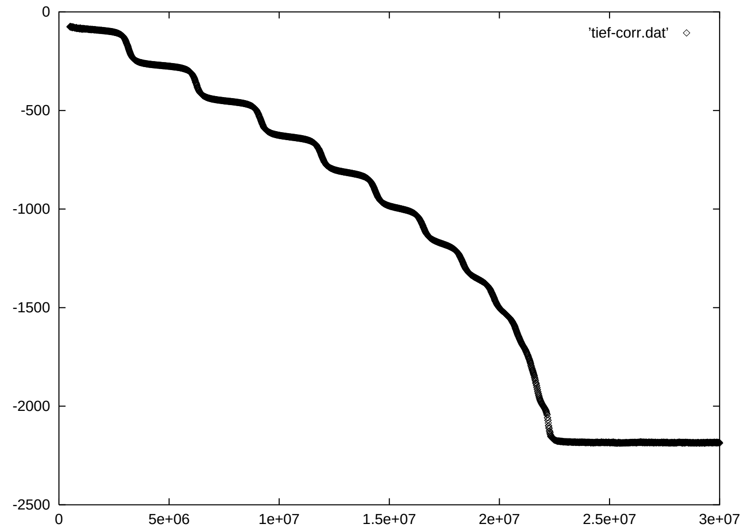

Abbildung 13: Phasenmaß des Tiefpasses im Bereich bis 30MHz

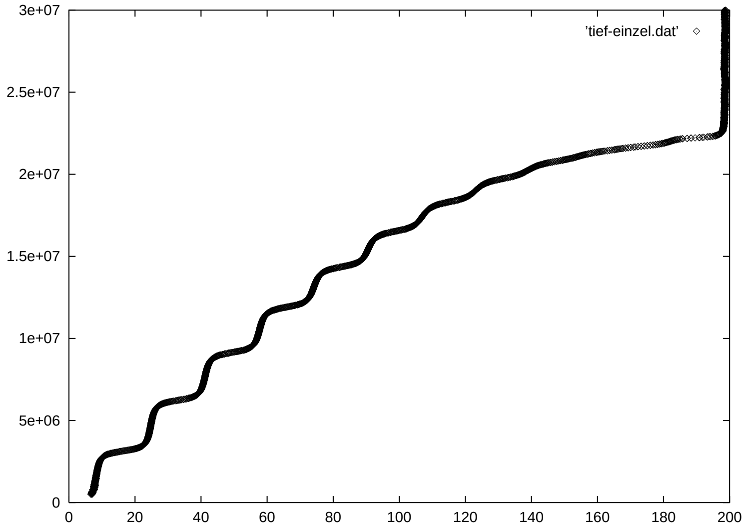

Abbildung 14: Brillouin-Diagramm eines Tiefpaßgliedes

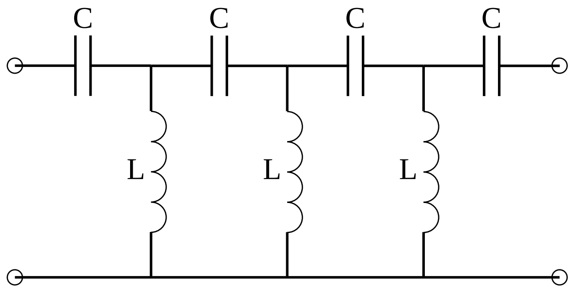

Abbildung 15: Hochpaß

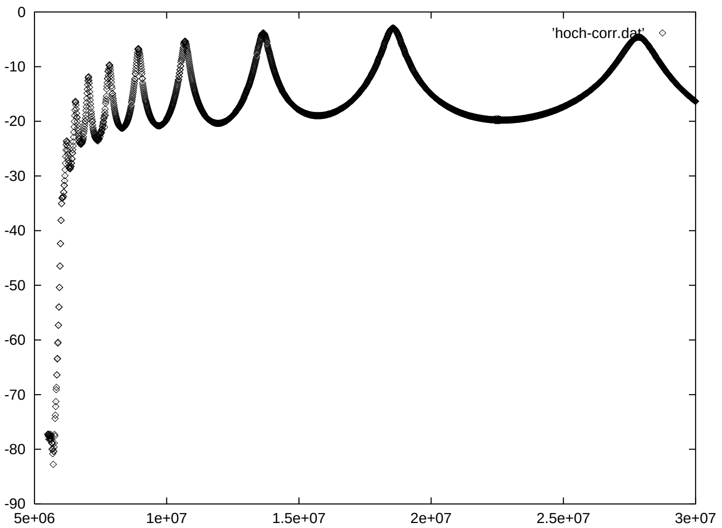

Abbildung 17: Dämpfungsmaß des Hochpasses im Bereich von 5.5MHz bis 30MHz

Für die Funktion $F(\omega)$ gilt hier

$$F(\omega) = 1 - \frac{1}{2\omega^2 LC}. \tag{25}$$

Die Funktion ist monoton steigend in ω, und der Grenzwert $F(\omega_1) = 1$ wird im Unendlichen $\omega_1 = \infty$ erreicht. Für den unteren Grenzwert gilt

$$F(\omega) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{LC}}. \tag{26}$$

Im Frequenzbereich von ω_2 bis ∞ ist die Dämpfung Null, unterhalb von ω_2 nimmt sie zu. Hohe Frequenzen dürfen ungehindert passieren, daher „Hochpaß“.

Auch hier wurden 11 Vierpole gemäß Abbildung 16 hintereinandergeschaltet. Die Spulen und Kondensatoren sind wie beim Tiefpaß dimensioniert (L=6.8μH, C=33pF), woraus eine Grenzfrequenz f_2=5.3MHz folgt.

In der Praxis zeigte sich, daß erst ab einer Frequenz von 5.5MHz vernünftige Meßwerte gewonnen werden konnten. Die Abbildungen 17 und 18 zeigen Dämpfungsmaß und Phasenmaß der gesamten Vierpolkette. Auch hier wurden Dämpfung und Phasenverschiebung des einzelnen Vierpolgliedes ausgerechnet und ein Brillouin-Diagramm (Abbildung 19) gezeichnet.

An der Dämpfungskurve sieht man, daß für die ersten Meßwerte um 5.5MHz eine Dämpfung von ca. -80dB gemessen wurde. Für geringere Frequenzen war die Anzeige nicht stabil: bei einer Dämpfung jenseits von 10^4 gegenüber des Vergleichssignales versteckt sich der eigentliche Meßwert hinter thermischem Rauschen.

3.3 Bandpaß

Als weiterer elektrischer Filter soll der Bandpaß besprochen werden, der als Vierpolkette wie in Abbildung 20 aufgebaut werden kann. Die Schaltung ist ähnlich

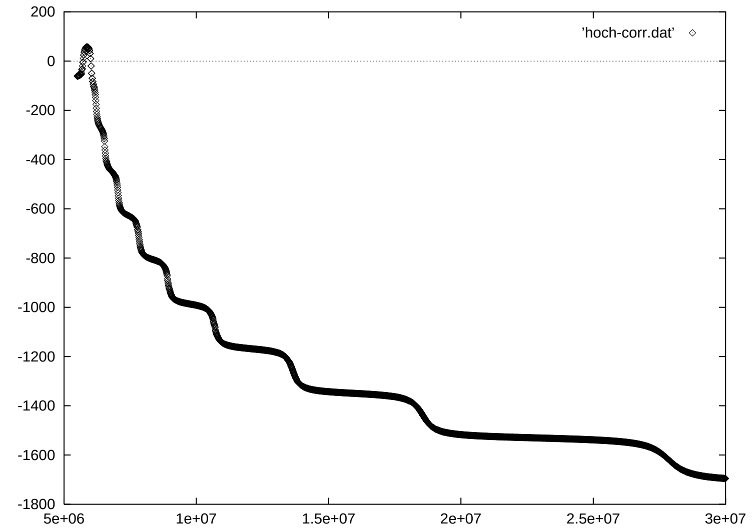

Abbildung 18: Phasenmaß des Hochpasses im Bereich von 5.5MHz bis 30MHz

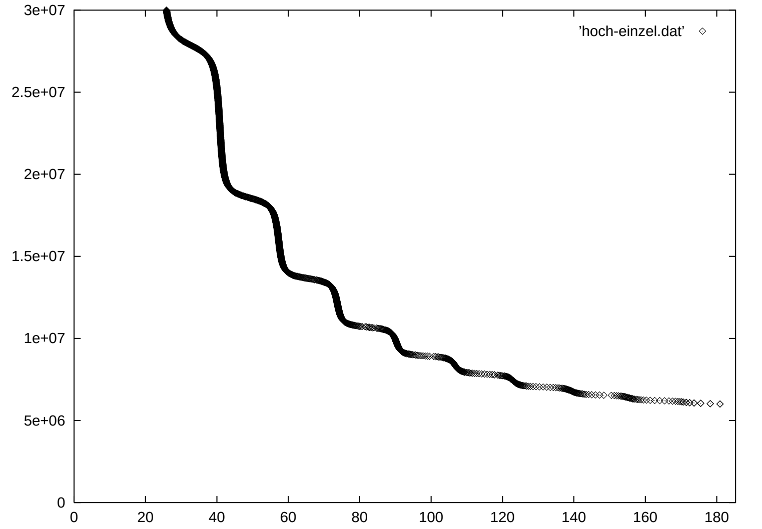

Abbildung 19: Brillouin-Diagramm eines Hochpaßgliedes

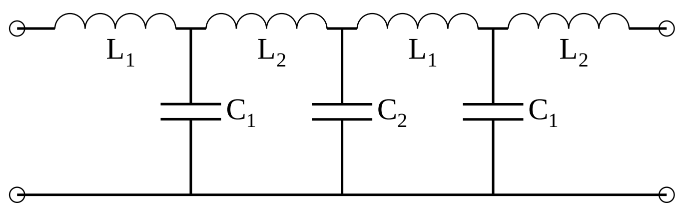

Abbildung 20: Bandpaß

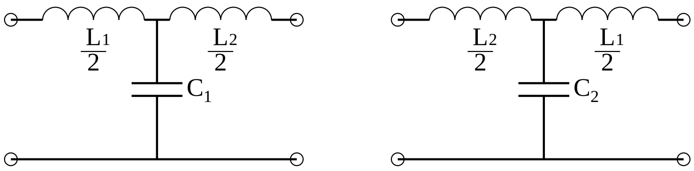

Abbildung 21: Bausteine eines Bandpasses

einem Tiefpaß, doch werden hier zwei verschiedene Induktivitäten bzw. Kapazitäten verwendet.

Den Aufbau können wir aber dennoch auf eine homogene Kette zurückführen, wenn wir jeweils zwei Kettenglieder wie in Abbildung 21 betrachten. Die Kette ist aus einer Anzahl identischer Vierpole aufgebaut, wobei jeder dieser Vierpole wiederum aus zwei „inneren" Vierpolen aufgebaut ist.

Beide dieser inneren Komponenten stellen eine T-Schaltung dar, deren Vierpolmatrix wir wie bisher einfach berechnen können.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2\omega^2 L_2 C_1} & -i\omega(\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2 - \frac{1}{4}\omega^2 L_1 L_2 C_1) \\ i\omega C_1 & 1 - \frac{1}{2\omega^2 L_1 C_1} \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2\omega^2 L_1 C_2} & -i\omega(\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2 - \frac{1}{4}\omega^2 L_1 L_2 C_2) \\ i\omega C_2 & 1 - \frac{1}{2\omega^2 L_2 C_2} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Nach Gleichung 5 können wir durch Multiplikation dieser beiden Matrizen die Vierpolmatrix des zusammengesetzten Vierpols berechnen, was jetzt hier nicht durchgeführt werden soll. Anschließend läßt sich ebenso wie beim Tiefpaß und beim Hochpaß die Funktion $F(\omega)$ aufstellen und die Grenzfrequenzen bestimmen. Dabei zeigt sich, daß $F(\omega)$ zweimal den Bereich von $-1 \leq F(\omega) \leq 1$ durchquert: wir erhalten zwei Durchlaßbänder. Die Grenzfrequenzen lauten

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 0 \\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2})(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}) - \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2})^2(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})^2 - \frac{4}{L_1 L_2 C_1 C_2}}} \\
\omega_3 &= \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2})(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}) + \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2})^2(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})^2 - \frac{4}{L_1 L_2 C_1 C_2}}} \\
\omega_4 &= \sqrt{(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2})(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})}
\end{aligned}$$

Die zwei Durchlaßbereiche erstrecken sich von ω_1 bis ω_2 sowie von ω_3 bis ω_4. Frequenzen zwischen ω_1 und ω_2 und jenseits von ω_4 werden gedämpft.

Im Experiment war der Bandpaß aus fünf Vierpolgliedern aufgebaut, wobei jedes Glied aus einer Hintereinanderschaltung zweier Komponenten wie in Abbildung 21 bestand. Mit den Induktivitäten L_1=6.7μH, L_2=5μH und den Kapazitäten C_1=33pF, C_2=60pF ergeben sich die Grenzfrequenzen

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 11.8MHz, \qquad f_3 = 16.6MHz, \qquad f_4 = 20.3MHz$$

Wie zuvor zeigen Abbildung 22 und 23 das Dämpfungsmaß und Phasenmaß der gesamten Vierpolkette. Abbildung 24 zeigt das Brillouin-Diagramm eines Gliedes der Kette. Man beachte, daß aufgrund der zwei Vierpolkomponenten ein einzelnes Glied durchaus eine Phasenverschiebung größer π bewirken kann.

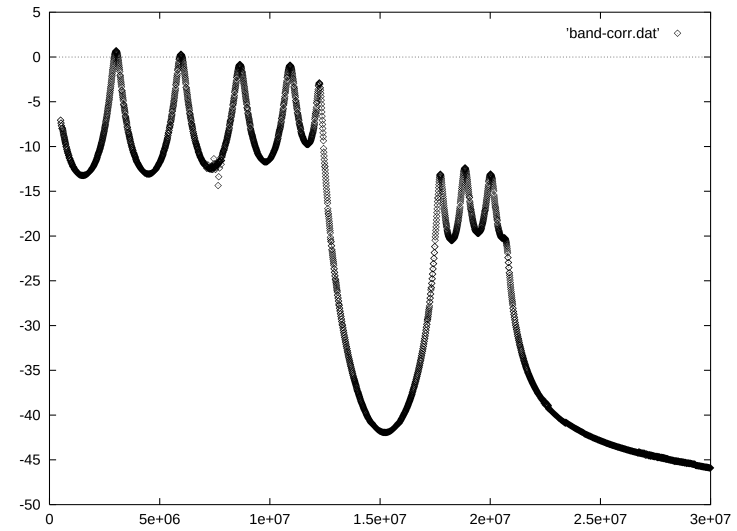

Abbildung 22: Dämpfungsmaß des Bandpasses im Bereich bis 30MHz

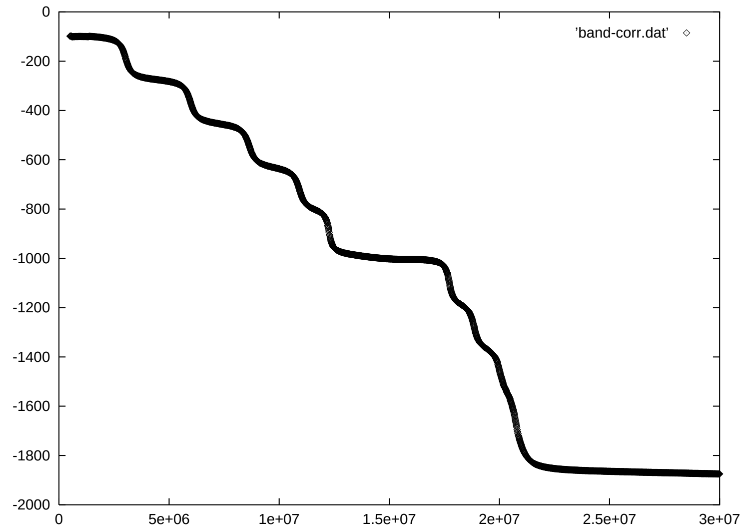

Abbildung 23: Phasenmaß des Bandpasses im Bereich bis 30MHz

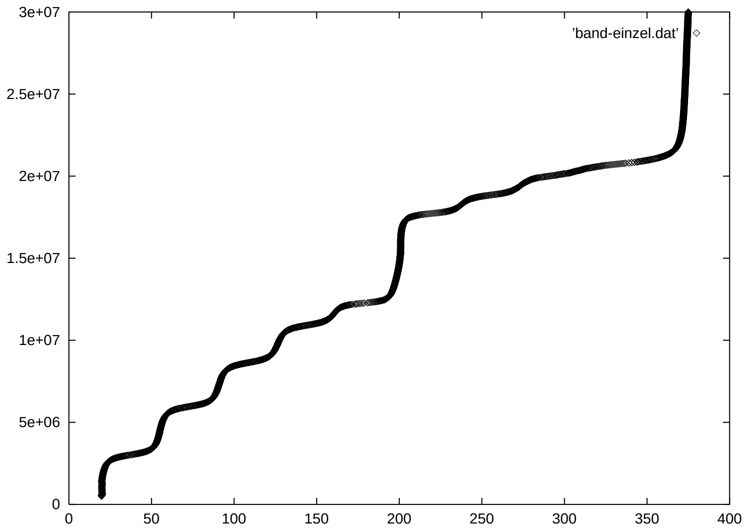

Abbildung 24: Brillouin-Diagramm eines Bandpaßgliedes

3.4 Auswertung

Qualitativ werden die berechneten Ergebnisse durch die Messungen bestätigt. Bei allen drei Vierpolketten lassen sich die Durchlaßbereiche sauber von den Sperrbereichen trennen, wobei die Grenzfrequenzen mehr oder weniger den Erwartungen entprechen.

Setzen wir willkürlich den -30dB-Punkt als „Grenzfrequenz“ der Kette fest, so beobachten wir

Filtertyp	Vorhergesagte Grenzfrequenz	Beobachtete Grenzfrequenz
Tiefpaß	21.2MHz	21.9MHz
Hochpaß	5.3MHz	6.1MHz
Bandpaß	11.8, 16.6, 20.3MHz	13.3, 17.1, 21.1MHz

Auffällig ist, daß diese „beobachteten“ Werte allesamt höher liegen als die vorhergesagten Grenzfrequenzen – sogar mehr oder weniger um den gleichen Betrag von ca. 600kHz!

Ein wenig unbefriedigend sind auch die auffälligen Schwankungen aller Kurven um den Erwartungswert herum. Dies ist hauptsächlich durch Resonanzen begründet, die von unserem statischen, nicht-optimalen Abschlußwiderstand von 50Ω herrühren. Bei gewissen Frequenzen können in der Versuchsanordung aufgrund von Reflexionen stehende Wellen entstehen, die wir natürlich mitmessen.

Doch auch ohne Reflexionen existieren noch genug Fehlerquellen, die unseren realen Versuchsaufbau von der sauberen Welt der Mathematik absetzen. So besitzen Spulen und Leitungen auch immer einen Ohm'schen Widerstand, und aufgrund von Fertigungsschwankungen der Spulen und Kondensatoren gleichen sich aufeinanderfolgende Kettenglieder nicht hundertprozentig – so entstehen auch Reflexionen innerhalb der Kette.

Ein weiteres auffälliges Ergebnis ist die Dämpfung des zweiten Durchlaßbandes des Bandpasses. Theoretisch sollte die Dämpfung Null sein, doch praktisch ist eine recht starke Dämpfung von durchschnittlich -16dB vorhanden, während im ersten Durchlaßband die Dämpfung um den vertretbaren Wert von -6dB pendelt. Hier treten offensichtlich in den Spulen deutlich erhöhte Ohm'sche Verluste auf.

4 Hohlraumresonator

Als weiterer „Vierpol" soll ein Hohlraumresonator betrachtet und durchgemessen werden. Zunächst einmal ist ein Hohl*leiter* hauptsächlich ein Nichts, von einem elektrisch leitenden Außenleiter umgeben. Im Inneren des Hohlleiters können sich elektromagnetische Wellen fortpflanzen.

Bei uns befindet sich im Inneren des Hohlleiters ein Sender. Von jedem Punkt des Senders breiten sich nach dem Huygens'schen Prinzip Punktwellen aus, die sich zunächst zu einer Kugelwelle überlagern. Trifft die Wellenfront auf den Außenleiter, so wird sie von dort reflektiert, die reflektierte Welle überlagert sich wiederum mit den sich axial ausbreitenden Teilen der ursprünglichen Kugelwelle. Im Inneren des Hohlleiters findet eine stetige Überlagerung der Wellenzüge statt, die sich unter leicht geändertem Anfangswinkel vom ursprünglichen Sender fortpflanzen.

Je nach Wellenlänge und Dimensionierung des Hohlleiters entstehen charakteristische Überlagerungen. Für gewisse Frequenzen überlagern sich die Individualwellen in axialer Richtung konstruktiv, für andere Frequenzen destruktiv.

In Hohlleitern ist die Gruppengeschwindigkeit abhängig von der Frequenz der Welle, es tritt also Dispersion auf. Bei bestimmten Frequenzen wird die Gruppengeschwindigkeit Unendlich, die zugehörigen Wellenlängen werden als „kritische" Wellenlängen bezeichnet. Es gibt zwei Ausprägungen dieser kritischen Wellen, die „E-Wellen", bei denen das magnetische Feld in axialer Richtung verschwindet ($H_z=0$) und die „H-Wellen", bei denen das elektrische Feld in axialer Richtung verschwindet ($E_z=0$).

Für einen Hohlleiter mit Kreisquerschnitt (Durchmesser D) können die kritischen Wellenlängen (und damit bei bekannter Ausbreigungsgeschwindigkeit auch die kritischen Frequenzen) wie folgt berechnet werden.

$$E_{m,n}\text{-Wellen:} \quad \lambda_k = \frac{\pi D}{j_{m,n}} \tag{29}$$

$$H_{m,n}\text{-Wellen:} \quad \lambda_k = \frac{\pi D}{j'_{m,n}} \tag{30}$$

Dabei ist $j_{m,n}$ die n. Nullstelle der Besselfunktion $J_m(x)$, und $j'_{m,n}$ ist die n. Nullstelle der Ableitung der Besselfunktion $J'_m(x)$, wobei eine eventuelle Nullstelle bei 0 nicht gezählt wird. Höhere Indizes der Wellen entsprechen sozusagen den „Oberwellen" der ersten kritischen Grundwelle.

Für uns sind hier nur die E-Wellen von Interesse. Wir suchen die kleinste kritische Frequenz, und demnach die größte kritische Wellenlänge, die wir bei der $E_{0,1}$-Welle erhalten. Für die $E_{0,1}$-Welle gilt laut Tabelle $\lambda_k = 1.31D$ (wobei D der Durchmesser des Hohlleiters ist).

Bislang waren wir aber immer noch beim Hohl*leiter*. Der Hohlraum*resonator* ist nun ein endlicher Hohlleiter, der an beiden Enden leitend abgeschlossen ist. An den Enden des Resonators wird unsere Welle reflektiert, die hin- und rücklaufenden Wellen überlagern sich. Dabei entstehen wiederum bei bestimmten

Wellenlängen bzw. Frequenzen Resonanzen in axialer Richtung. Die entstehenden Resonanzen heißen $E_{m,n,p}$-Resonanzen (bzw. $H_{m,n,p}$ im Fall der hier uninteressanten H-Wellen). p gibt die Anzahl der Wellenzüge in axialer Richtung an, wobei auch $p = 0$ möglich ist – in diesem Fall hat das E-Feld in axialer Richtung überall den gleichen Wert.

Die Resonanzwellenlänge läßt sich aus der kritischen Wellenlänge wie folgt berechnen.

$$\lambda_R = \frac{\lambda_k}{\sqrt{1 + \left(\frac{p\lambda_k}{2h}\right)}} \tag{31}$$

Dabei ist h die Länge des Hohlraumresonators.

Auch hier suchen wir wieder nach der größtmöglichen Resonanzwellenlänge und erkennen, daß λ_R den größten Wert für $p = 0$ annimmt, in diesem Fall ist $\lambda_R = \lambda_k$ und interessanterweise von der Länge des Resonators unabhängig.

In unserem Versuch verbirgt sich hinter dem Begriff des Hohlraumresonators eine handelsübliche zylinderförmige Keksdose Marke „Mermaids“. Mit einem Lineal ausgemessen, betrug der Durchmesser $D = 265mm$ und die Länge bzw. Höhe $h = 65mm$. Zum Bedauern der Experimentatoren war der Hohlraum tatsächlich leer, weshalb der Einfluß einer Beladung mit unterschiedlicher Menge Keksen (zwischen Voll und Leer) nicht überprüft werden konnte.

Aus diesen Daten errechnet sich nach 29 und 31 eine Resonanzfrequenz von 864.2MHz. Alle anderen möglichen „Oberwellen“ befinden sich jenseits unserer oberen Meßgrenze von 1GHz.

4.1 Reflexionsfaktor

Zunächst wurde der Reflexionsfaktor des Resonators gemessen. Die „Sendefrequenz“ wurde in axialer Richtung in die Dose eingespeist, gleichzeitig wurde die am Sender reflektierte Welle ausgewertet. Dabei interessiert uns hier ausschließlich die Amplitude der zurücklaufenden Welle. Zur Messung wurden in die Meßleitung zwei Richtkoppler eingebaut, die jeweils die hin- bzw. rücklaufende Welle zum Messen auskoppeln.

Der Reflexionsfaktor in der Umgebung der vermuteten Resonanzfrequenz ist in Abbildung 25 dargestellt. An der Resonanzfrequenz ist die Reflexion minimal. In der Terminologie unserer Vierpole heißt das, daß der Resonator an der Resonanzfrequenz einen fast idealen Abschluß darstellt: die Welle läuft nur in einer Richtung. Außerhalb der Resonanz wird ein gewisser Teil der einlaufenden Welle am nicht angepaßten Abschluß reflektiert.

Energetisch ausgedrückt läßt sich sagen, daß wir an der Resonanzfrequenz nur Energie in die im Resonator stehende Welle hereinpumpen. Das elektromagnetische Wechselfeld im Inneren erzeugt aber Ströme im Dosenrand, die über Ohm'sche Widerstände die Energie des Feldes verbrauchen. Das Gleichgewicht der über den Sender eingespeisten und über Wirbelströme vernichteten Energie verhindert ein „Platzen“ der Dose.

An der Kurve lesen wir ab, daß der Reflexionsfaktor bei f=844.56MHz minimal wird. Die Differenz zum theoretischen Wert ist auf den ersten Blick groß, relativiert sich aber durch Meßfehler beim Ausmessen der Dose mit einem Lineal und vor allem durch die nicht ideale Zylinderform der Keksdose. Insbesondere Deckel und Boden sind nicht eben sondern gewellt. Auch sind leichte Verformungen nicht auszuschließen. Immerhin hat uns der theoretisch berechnete Wert in

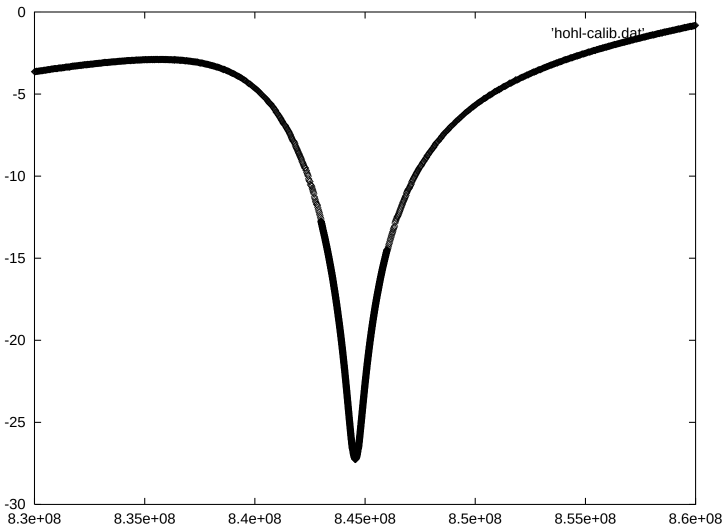

Abbildung 25: Reflexionsfaktor des Hohlraumresonators „Keksdose“

die richtige Richtung gewiesen und ein Durchmessen eines Frequenzbandes von mehreren 100MHz erspart.

4.2 Transmission

Zum Abschluß wird am Hohlraumresonator noch eine Transmissionsmessung durchgeführt. Hierfür ist am äußeren Rand der Dose eine Drahtschleife eingelassen, die eine senkrecht auf der Wand stehende Fläche umschließt. Die Idee ist, daß die in axialer Richtung orientierten elektrischen Wechselfelder nach der zweiten Maxwell'schen Gleichung

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \oint_F \vec{E} d\vec{F} \tag{32}$$

ein magnetisches Wirbelfeld erzeugen. Dabei ist nach dieser Formel die Stärke der magnetischen Feldlinien umso größer, je mehr „Verschiebungsstrom“ umschlossen wird. Der resultierende magnetische Fluß ist daher am Rande der Keksdose – im Bereich unserer Drahtschleife – am größten. Das induzierte magnetische Wirbelfeld ist wie das elektrische Feld zeitabhängig; ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluß induziert aber wiederum eine Spannung in unserer Drahtschleife, die wir messen können.

In der Nähe der Resonanzfrequenz nimmt die stehende elektrische Welle immer mehr Energie auf und vergrößert ihre Amplitude. Eine größere Amplitude bei gleichbleibender Frequenz heißt aber auch eine größere Ableitung der elektrischen Feldstärke, und damit steigt laut Gleichung 32 die Amplitude des magnetische Flusses in unserer Drahtschleife und somit auch die Amplitude der induzierten Spannung.

Bei der Transmissionsmessung erwarten wir also ein Maximum an Ausgangsspannung. Das Ergebnis ist in Abbildung 26 aufgetragen.

Interessanterweise stimmt die Resonanzfrequenz der Transmissionsmessung nicht mit der bei der Reflexionsmessung bestimmten Resonanzfrequenz übe-

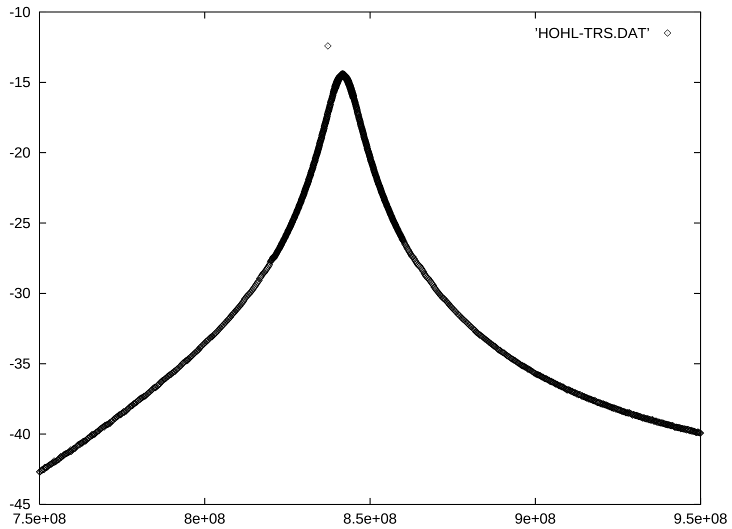

Abbildung 26: Transmission des Hohlraumresonators „Keksdose“

rein. Bei dieser Meßreihe wird der größte Wert der Ausgangsspannung bei f=841.96MHz abgelesen.

Traditionell kann noch die Güte der Resonanz bestimmt werden, definiert als $Q = \frac{f}{\Delta f}$, wobei Δf die „Bandbreite“ der Resonanz ist, begrenzt durch die -3dB-Punkte, an denen die Amplitude gegenüber dem Maximum auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist. In diesem Fall liegt der -3dB-Punkt „links“ bei f_1=836.9MHz, der -3-dB-Punkt „rechts“ bei f_2=846.6MHz, woraus sich eine Güte von Q=86.7 ergibt.