Axiome der booleschen Algebra

Kommutativität	$xy = yx$ $x + y = y + x$
Assoziativität	$x(yz) = (xy)z$ $x + (y + z) = (x + y) + z$
Distributivität	$x(y + z) = xy + xz$ $x + yz = (x + y)(x + z)$
Absorption	$x(x + y) = x + xy = x$
Idempotenz	$xx = x + x = x$
Negation	$x\overline{x} = 0$ $x + \overline{x} = 1$ $\overline{\overline{x}} = x$
De Morgan	$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
Op. mit 0 und 1	$x \cdot 1 = x$ $x \cdot 0 = 0$ $x + 0 = x$ $x + 1 = 1$ $\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$

Normalformen am Beispiel $x \oplus y$

Disjunktive Normalform: Veroderung von Und-Klauseln: $x\overline{y} + \overline{x}y$

Konjunktive Normalform: Verundung von Oder-Klauseln: $(x + y)(\overline{x} + \overline{y})$

Reed-Muller Normalform: Exlusiv-Oder von Und-Klauseln, die keine negierten Literale enthalten: $x \oplus y$

Veitch Diagramme: Spezielle Form von Wertetabellen:

	Y	
X		1
	1	

Disjunktive Normalform

- EOR in N Variablen hat 2^N Terme

- erhält man aus Wertetabelle, indem man die Minterme verodert, Beispiel $x \oplus y$:

x	y	$x \oplus y$	Minterm
0	0	0	
0	1	1	$\overline{x}y$
1	0	1	$x\overline{y}$
1	1	0	

Durch Veroderung der Minterme erhält man $\overline{x}y + x\overline{y}$ als disjunktive Normalform.

Konjunktive Normalform

- EOR in N Variablen hat 2^N Terme

- erhält man aus Wertetabelle, indem man die Maxterme verundet, Beispiel $x \oplus y$:

x	y	$x \oplus y$	Minterm
0	0	0	$x + y$
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	$\overline{x} + \overline{y}$

Durch Verundung der Maxterme erhält man $(x + y)(\overline{x} + \overline{y})$ als konjunktive Normalform.

Reed-Muller Normalform

- Oder in N Variablen hat exponentiell viele Terme

- erhält man mittels folgender Ersetzungsregeln (Hsiang 85):

$$
\begin{aligned}
x + y &\Rightarrow xy \oplus x \oplus y && (1)\\
\overline{x} &\Rightarrow x \oplus 1 && (2)\\
x \cdot 1 &\Rightarrow x && (3)\\
x \cdot x &\Rightarrow x && (4)\\
x(y \oplus z) &\Rightarrow xy \oplus xz && (5)\\
x \oplus x &\Rightarrow 0 && (6)\\
x \oplus 0 &\Rightarrow x && (7)\\
x \cdot 0 &\Rightarrow 0 && (8)
\end{aligned}
$$

Reed-Muller Normalform (Fortsetzung)

- Beispiel:

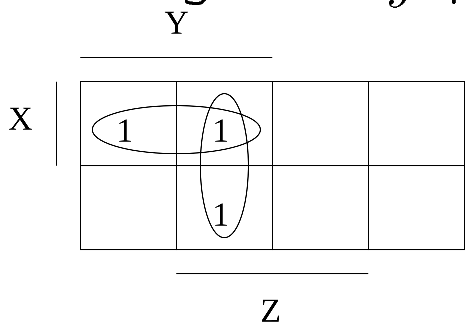
$$
\begin{aligned}
\overline{x}y + x\overline{y} &\stackrel{(1)}{\Longrightarrow} 0 \oplus \overline{x}y \oplus x\overline{y} \\
&\stackrel{(7)}{\Longrightarrow} \overline{x}y \oplus x\overline{y} \\
&\stackrel{(2)}{\Longrightarrow} (1 \oplus x)y \oplus x(1 \oplus y) \\
&\stackrel{(5)}{\Longrightarrow} xy \oplus y \oplus xy \oplus x \\
&\stackrel{(6)}{\Longrightarrow} y \oplus x
\end{aligned}
$$

Veitch Diagramme

- zur Minimierung boolescher Ausdrücke geeignet

- funktioniert nur bis zu vier Variablen

- Beispiel: Minimierung von $xy + xyz + xz$:



Man erhält $xy + xz$.

Realisierung boolescher Schaltungen

- NAND ist Universalgatter
- Wie kann man entscheiden, ob man z.B. AND aus EOR's bauen kann?

Verfahren:

1. Berechne die Mengen $W_0, W_1, W_2, \ldots$ der mit keinem, einem, zwei, usw. EOR Gattern realisierbaren booleschen Funktionen:

$$\begin{aligned} W_0 &:= \{0, 1, x, y\} \\ W_{i+1} &:= W_i \cup \{u \oplus v | u, v \in W_i\} \end{aligned}$$

2. Nach j Schritten gilt $W_j = W_{j+1}$. Ist dann AND in W_j, so läßt sich AND aus EOR's bauen, andernfalls nicht.