Fortgeschrittenenpraktikum WS 1996/97
Protokoll zum Versuch „Wechselstrombrücke“

Kay Römer Frank Pilhofer

24. Februar 1997

Zusammenfassung

In diesem Versuch sollen mit Hilfe der Wechselstrombrücke Kapazitäten und Induktivitäten gemessen werden. Außerdem wird aus den vermessenen Bauteilen ein Reihenschwingkreis aufgebaut und dessen Güte und Resonanzkurve aufgenommen.

1 Grundlagen

1.1 Wechselstrombrücke

Die Wechselstrombrücke dient zur Messung von Phase und Amplitude unbekannter Wechselspannungen. Sie besteht aus zwei getrennten Stromkreisen, die durch induktive Kopplung mit der gleichen Wechselspannung (gleiche Phase und Amplitude) betrieben werden. Der erste Stromkreis besteht aus einer Reihenschaltung eines Vorwiderstandes R und eines Abgriffswiderstandes R_p, der zweite Stromkreis besteht aus der Reihenschaltung einer Kapazität C und eines Abgriffswiderstandes R_q. Falls der Widerstand R_q klein gegenüber dem Scheinwiderstand der Kapazität ist, sind die über R_q und R_p abgegriffenen Spannungen u_q bzw. u_p[1] 90° phasenverschoben.

Durch „Linearkombination“ dieser beiden Spannungen kann eine sinusförmige Wechselspannung mit beliebiger Phase und Amplitude erzeugt werden. Auf das komplexe Koordinatensystem übertragen bildet u_p den reellen Anteil und u_q den komplexen Anteil der „linearkombinierten“ Wechselspannung. Im Versuch wird diese „Linearkombination“ durch Reihenschaltung der beiden Spannungen erreicht, wobei durch zwei Schalter die Vorzeichen von u_p und u_q getrennt voneinander umgekehrt werden können.

Zur Messung von Phase und Amplitude einer unbekannten Wechselspannung u_x werden u_x, u_q, u_p und ein wechselspannungsempfindliches Meßgerät (zum Beispiel ein Oszillograph) im Reihe geschaltet. Nun werden die verstellbaren Widerstände R_p und R_q so eingestellt, daß der Oszillograph spannungslos wird, d.h. $u_p + u_q + u_x = 0$ gilt. Damit diese Kompensation funktioniert, müssen u_p, u_q und u_x natürlich die gleiche Kreisfrequenz ω aufweisen. Aus den gemessenen Werten für u_p und u_q können nun Amplitude $|u_x|$ und Phasenverschiebung φ_x gegenüber u_p bestimmt werden:

[1] Der Index q steht für „in quadrature“, also um ein Viertel phasenverschoben; p steht für „in phase“.

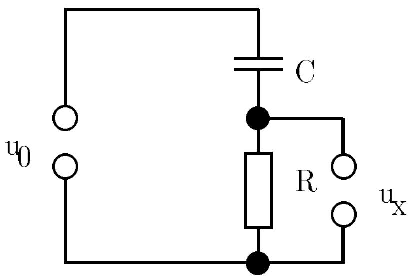

Abbildung 1: Messung von Kapazitäten

$$\tan \varphi_x = \frac{u_q}{u_p}$$

$$|u_x| = \sqrt{u_q^2 + u_p^2}$$

1.2 Bestimmung von Kapazitäten

Zur Bestimmung von Kapazitäten mit der Wechselstrombrücke wird der in Abbildung 1.2 gezeigte Aufbau verwendet: Ein Stromkreis bestehend aus der zu bestimmenden Kapazität C und einem Widerstand R wird mit der Wechselspannung u_0 betrieben. Über R fällt die Spannung u_x ab. Aus $u_0 = u_x + u_C$ folgt:

$$u_x = u_0 R \left(\frac{(\omega C)^2 R}{1 + (\omega C R)^2} + j \frac{\omega C}{1 + (\omega C R)^2} \right) \tag{1}$$

wobei sich der Wert von u_x auf das Koordinatensystem bezieht, daß u_0 als reelle Achse hat. Man erhält also den Tangens der Phasenverschiebung φ von u_x gegenüber u_0, wenn man in Gleichung 1 den Imaginärteil durch den Realteil von u_0 teilt:

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega C R} \tag{2}$$

Damit hat man ein einfaches Meßverfahren für Kapazitäten: Mittels der Wechselstrombrücke werden die Phasen φ_0 und φ_x von u_0 bzw. u_x ermittelt. Aus Gleichung 2 folgt dann:

$$C = \frac{1}{\omega R \tan(\varphi_x - \varphi_0)} \tag{3}$$

Für optimale Meßgenauigkeit muß R so gewählt werden, daß der Scheinwiderstand von C und R in der gleichen Größenordnung liegen (oder, gleichbedeutend damit, $\varphi_x - \varphi_0 \approx 45°$).

Wird R zu groß, dann wird der Spannungsabfall über C sehr klein. Ist dagegen R zu klein, so wird der über R gemessene Spannungsabfall sehr klein. Beides führt zu erhöhten Meßungenauigkeiten.

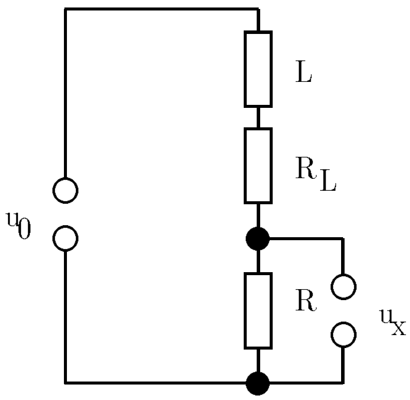

Abbildung 2: Messung von Induktivitäten

1.3 Bestimmung von Induktivitäten

Zur Bestimmung von Induktivitäten verwendet man die in Abbildung 1.3 gezeigte Schaltung. Die reale Spule wird dort durch eine Ersatzschaltung bestehend aus der reinen Induktivität L und dem reinen ohmschen Widerstand R_L gezeigt. Aus $u_0 = u_x + u_L + u_{R_L}$ folgt:

$$u_x = u_0 R \left(\frac{R + R_L}{(\omega L)^2 + (R + R_L)^2} + j \frac{\omega L}{(\omega L)^2 + (R + R_L)^2} \right) \tag{4}$$

Wieder bezieht sich die Lage von u_x auf das Koordinatensystem, dessen reelle Achse u_0 ist. Dividiert man also in Gleichung 4 Imaginär- durch Realteil, so erhält man den Tangens der Phasenverscheibung φ von u_x gegenüber u_0.

$$\tan \varphi = \frac{-\omega L}{R + R_L} \tag{5}$$

Anders als beim Kondensator treten in Gleichung 5 zwei Unbekannte auf. Man muß also zwei Messungen mit zwei verschiedenen Widerständen R_1 und R_2 durchführen und in dem resultierenden Gleichungssystem R_L oder L emliminieren. Man erhält:

$$R_L = \frac{R_1 \frac{\tan(\varphi_1 - \varphi_0)}{\tan(\varphi_2 - \varphi_0)} - R_2}{1 - \frac{\tan(\varphi_1 - \varphi_0)}{\tan(\varphi_2 - \varphi_0)}} \tag{6}$$

$$L = \frac{R_1 - R_2}{\frac{\omega}{\tan(\varphi_2 - \varphi_0)} - \frac{\omega}{\tan(\varphi_1 - \varphi_0)}} \tag{7}$$

Für optimale Meßgenauigkeiten sollte wiederum $\omega L + R_L$ in der Größenordnung von R_1 und R_2 liegen.

1.4 Reihenschwingkreis

Schaltet man eine Kapazität C, eine Induktivität L und einen ohmschen Widerstand R in Reihe, so erhält man einen Reihenschwingkreis. Für den Gesamtwiderstand Z dieser Anordnung gilt:

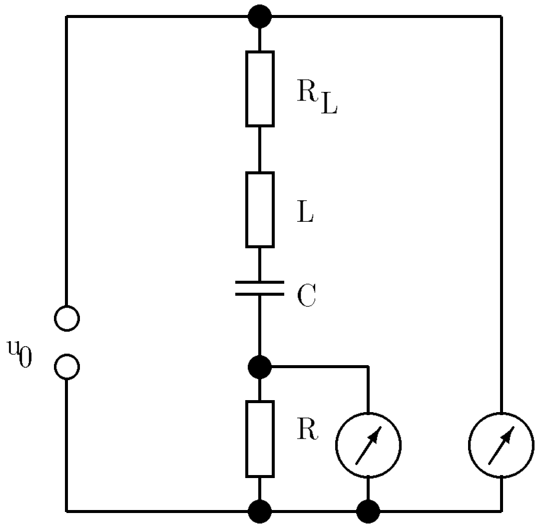

Abbildung 3: Reihenschwingkreis

$$Z = R_L + R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = (R_L + R)(1 + Q_0 v) \tag{8}$$

wobei

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R_L + R} \tag{9}$$

als Güte und

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 2\frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_0} \tag{10}$$

als Verstimmung des Schwingkreises bezeichnet wird. ω_0 ist die Kreisgeschwindigkeit, bei der der Betrag von Z minimal wird. Das ist dann der Fall, wenn sich die komplexen Wechselstromwiderstände der Induktivität und der Kapazität aufheben, d.h. wenn $j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C} = 0$ bzw.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11}$$

gilt. Da der Gesamtwiderstand in diesem Fall gleich $R + R_L$ ist (d.h. rein reell), folgt, daß bei ω_0 Strom und Spannung im Reihenschwingkreis in Phase sind.

Bestimmung der Resonanzfrequenz

Zur experimentellen Bestimmung der Resonanzfrequenz kann man sich zwei Eigenschafen zu Nutze machen:

- minimaler Gesamtwiderstand bzw. maximaler Strom bei Resonanz
- Strom und Spannung sind bei Resonanz in Phase

Hat man nur einen Oszillographen zur Verfügung kann man den Strom nicht direkt messen. Statt dessen mißt man den Spannungsabfall über dem Widerstand R, der ja proportional zum Strom durch den Reihenschwingkreis ist. Man sollte jedoch darauf achten, daß R klein im Vergleich zum Scheinwiderstand der Kapazität oder der Induktivität im Bereich der Resonanzfrequenz ist. Ansonsten überlagert der hohe Spannungsabfall am Widerstand die relativ gesehen kleinen Spannungsabfälle an Induktivität und Kapazität und die Resonanzkurve wird sehr flach bzw. geht in den Meßfehlern ganz unter. Bei flachen Resonanzkurven ist es mit dieser Methode oft schwierig, die Resonanzfrequenz genau zu bestimmen, da sich die Stromwerte in der Umgebung der Resonanzfrequenz kaum meßbar unterscheiden. Man kann dann meist nur einen recht großen Bereich angeben, in dem die Resonanzfrequenz liegt.

Den Nullphasendurchgang zwischen Spannung und Strom kann man leicht im XY-Betrieb des Oszillographen sichtbar machen. Die Spannung kann man direkt am Frequenzgenerator abgreifen und legt sie auf den X-Kanal, anstelle des Stromes mißt man wieder den Spannungsabfall über dem Widerstand und legt sie an den Y-Kanal. Spannung und Strom im Reihenschwingkreis sind in Phase, wenn auf dem Oszillographenschirm eine Gerade zu sehen ist. Da dieser Zustand nur bei einer Phasenverschiebung von nahezu exakt 0 angenommen wird, ist diese Methode sehr genau.

Bestimmung der Güte

Die Güte Q_0 ist ein Maß für die Steilheit der Resonanzkurve eines Schwingkreises. Zur rechnerischen Bestimmung dient die Gleichung 9.

Zur experimentellen Bestimmung der Güte bestimmt man die Kreisgeschwindigkeit $\overline{\omega}$, bei der der Strom im Schwingreis auf den $\sqrt{2}$ ten Teil des Maximums abgefallen ist. Dort gilt nämlich

$$Q_0 = \frac{1}{v} \approx Q_0 \left(\frac{2|\overline{\omega} - \omega_0|}{\omega_0} \right)$$

womit folgt

$$Q_0 \approx \frac{\omega_0}{2|\overline{\omega} - \omega_0|} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \tag{12}$$

wobei $\Delta\omega$ bzw. Δf die Breite der Resonanzkurve an der „$\sqrt{2}$ Stelle“ ist.

2 Versuchsdurchführung

2.1 Phasenlage der Referenzspannung

Zur Bestimmung der Phasenverschiebung der Spannung u_0 gegenüber der „in phase“ Spannung u_p der Wechselstrombrücke wurde u_0 als zu messende Spannung an die Wechselstrombrücke angeschlossen und die Werte von u_p und u_q gemessen, die zur Kompensation von u_0 notwendig sind. Wir haben die in Tabelle 1 gezeigte Meßreihe aufgenommen.

Das ergibt für die Mittelwerte $u_q = 0.205 \pm 0.004V$ bzw. $u_p = 0.984 \pm 0.007V$. Daraus kann man nun mittels Gleichung 1.1 die Phasenverschiebung φ_0 berechnen. Man erhält $\varphi_0 = 0.205 \pm 0.004$ im Bogenmaß, was in etwa $11.7°$

$u_q[V]$	0.203	0.2095	0.202
$u_p[V]$	0.983	0.991	0.977

Tabelle 1: Meßreihe Referenzspannung

$u_q[V]$	-0.281	-0.2795	-0.2915
$u_p[V]$	-0.032	-0.029	-0.026

Tabelle 2: Meßreihe kleiner Kondensator

entspicht. Der Fehler wurde nach der folgenden Gleichung berechnet, die aus Gleichung 1.1 mittels des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes hergeleitet wurde:

$$\sigma_{\varphi_0} = \frac{1}{1+\left(\frac{u_q}{u_p}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{u_p}u_q}{u_p^2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{u_q}}{u_p}\right)^2} \tag{13}$$

2.2 Bestimmung von Kapazitäten

Zur Bestimmung von Kapazitäten wird die in Abbildung 1.2 gezeigte Schaltung verwendet, wobei die Phasenlage φ der Spannung u_x mit der Wechselstrombrücke gemessen wird, um mittels Gleichung 2 die Kapazität C berechnen zu können.

Um den Widerstand R zu bestimmen, mit dem die größte Meßgenauigkeit erzielt werden kann, wurde für jeden der Kondensatoren zuerst eine Übersichtsmessung mit verschiedenen Widerständen durchgeführt, die im Anhang graphisch wiedergegeben sind. Für den Widerstand, bei dem die Phasenverschiebung von u_x gegenüber u_0 am nächsten bei 45° liegt (siehe dazu auch „Bestimmung von Kapazitäten" in den Grundlagen), wurde dann eine Meßreihe aufgenommen.

Kleiner Kondensator

Für den kleinen Kondensator zeigte es sich, daß beim größten verfügbaren Widerstand von $100k\Omega$ die Phasenverschiebung mit einem Wert von ca. 72° dem optimalen Wert am nächsten kommt. Bei $R = 100k\Omega$ wurde die in Tabelle 2 gezeigte Meßreihe aufgenommen.

Das ergibt für die Mittelwerte $u_q = -0.284 \pm 0.007V$ bzw. $u_p = -0.029 \pm 0.003V$. Der daraus mittels Gleichungen 1.1 und 13 ermittelte Werte für Phasenverschiebung und Fehler lautet $\varphi = 1.469 \pm 0.11$, was in etwa 84° entspricht.

Mittels Gleichung 3 kann man nun den Wert von C berechnen: $C = 10.0 \pm 0.41nF$. Der Fehler wurde nach folgender Formel berechnet, die man nach dem „Gaußschem Fehlerfortpflanzungsgesetz" aus Gleichung 3 erhält:

$$\sigma_C = \frac{1}{\omega R \sin^2(\varphi - \varphi_0)}\sqrt{\sigma_\varphi^2 + \sigma_{\varphi_0}^2}$$

$u_q[V]$	-0.574	-0.564	-0.574
$u_p[V]$	-0.609	-0.613	-0.618

Tabelle 3: Meßreihe großer Kondensator

$u_q[V]$	0.294	0.2945	0.297	0.293
$u_p[V]$	-0.291	-0.291	-0.283	-0.2895

Tabelle 4: Meßreihe Spule für R_1

Großer Kondensator

Für den kleinen Kondensator zeigte es sich, daß bei einem Widerstand von 100Ω die Phasenverschiebung mit einem Wert von ca. $32°$ dem optimalen Wert nahe kommt. Bei $R = 100\Omega$ wurde dann die in Tabelle 3 gezeigte Meßreihe aufgenommen.

Das ergibt für die Mittelwerte $u_q = -0.571 \pm 0.006V$ bzw. $u_p = -0.613 \pm 0.005V$. Der daraus mittels Gleichungen 1.1 und 13 ermittelte Werte für Phasenverschiebung und Fehler lautet $\varphi = 0.75 \pm 0.007$, was in etwa $42°$ entspricht.

Mittels Gleichung 3 kann man nun den Wert von C berechnen: $C = 52.5 \pm 0.96\mu F$. Der Fehler wurde nach Gleichung 2.2 berechnet.

2.3 Bestimmung von Induktivitäten

Zur Bestimmung von Induktivitäten wird die in Abbildung 1.3 gezeigte Schaltung verwendet, wobei die Phasenlagen φ_1 und φ_2 für zwei verschiedene Widerstände R_1 und R_2 mit der Wechselstrombrücke gemessen werden, um mittels Gleichungen 6 und 7 die Induktivität und den Innenwiderstand berechnen zu können.

Auch hier wird wieder als erstes eine Übersichtsmessung durchgeführt, um eine geeignete Werte für R_1 und R_2 zu finden (näheres dazu siehe „Grundlagen“). Dabei zeigte sich, daß bei $R = 100\Omega$ die Phasenverschiebung zwischen u_x und u_0 bei $-51°$ liegt. Wir wählten daher $R_1 = 100\Omega$ und $R_2 = 70\Omega$.

Für R_1 haben wir die in Tabelle 4 wiedergegebenen Werte gemessen.

Das ergibt für die Mittelwerte $u_q = 0.295 \pm 0.002V$ bzw. $u_p = -0.289 \pm 0.004V$. Der daraus mittels Gleichungen 1.1 und 13 ermittelte Werte für Phasenverschiebung und Fehler lautet $\varphi_1 = -0.796 \pm 0.008$, was in etwa $-45°$ entspricht.

Für R_2 haben wir die in Tabelle 5 wiedergegebenen Werte gemessen.

Das ergibt für die Mittelwerte $u_q = 0.241 \pm 0.003V$ bzw. $u_p = -0.190 \pm 0.006V$. Der daraus mittels Gleichungen 1.1 und 13 ermittelte Werte für Phasenverschiebung und Fehler lautet $\varphi_2 = -0.903 \pm 0.02$, was in etwa $-51°$ entspricht.

$u_q[V]$	0.243	0.2385	0.243	0.238
$u_p[V]$	-0.195	-0.195	-0.185	-0.186

Tabelle 5: Meßreihe Spule für R_2

Aus den Werten für φ_1 und φ_2 können nun mittels der Gleichungen 6 und 7 Induktivität und Innenwiderstand der Spule ermittelt werden.

Innenwiderstand

Da die Fehlerrechung aufgrund der Komplexität der Formel recht kompliziert ist, wird die Ermittlung des Fehlers in zwei Schritten durchgefürt. Zunächst werden $f(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) := \frac{\tan(\varphi_1 - \varphi_0)}{\tan(\varphi_2 - \varphi_0)}$ und $\sigma_{f(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)}$ ermittelt. Im zweiten Schritt werden diese Werte dann verwendet, um R_L und σ_{R_L} zu errechnen. Es gilt:

$$\sigma_{f(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_0}\sigma_{\varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\sigma_{\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\sigma_{\varphi_2}\right)^2}$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = \frac{1 + \tan^2(\varphi_1 - \varphi_0)}{\tan(\varphi_2 - \varphi_0)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = -\frac{\tan(\varphi_1 - \varphi_0)}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_0)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = \frac{\tan(\varphi_1 - \varphi_0)}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_0)} - \frac{1 + \tan^2(\varphi_1 - \varphi_0)}{\tan(\varphi_2 - \varphi_0)}$$

Damit erhält man schließlich $f(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = 0.7786 \pm 0.016$.
Nun gilt aber

$$\sigma_{R_L} = \left|\frac{R_1 - R_2}{1 - f(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)}\sigma_{f(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)}\right|$$

Damit erhält man $R_L = 35.6 \pm 9.8\Omega$. Der Fehler ist recht groß, allerdings habe ich keine Unstimmigkeit in der Berechnung entdecken können, so daß der er in der Ableseungenauigkeit begründet liegen muß, da ja hier die Fehler von zwei Messungen eingehen.

Induktivität

Hier ist die Fehlerrechnung etwas einfacher, man kann sie in einem Schritt durchführen. Man erhält:

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_0}\sigma_{\varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}\sigma_{\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}\sigma_{\varphi_2}\right)^2}$$

mit

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \frac{-\frac{R_1 - R_2}{\sin^2(\varphi_1 - \varphi_0)}}{\omega\left(\frac{1}{\tan(\varphi_2 - \varphi_0)} - \frac{1}{\tan(\varphi_1 - \varphi_0)}\right)^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = \frac{\frac{R_1 - R_2}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_0)}}{\omega\left(\frac{1}{\tan(\varphi_2 - \varphi_0)} - \frac{1}{\tan(\varphi_1 - \varphi_0)}\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}$$

Letzlich ergibt das folgenden Wert für die Induktivität: $L = 0.674 \pm 0.06 Hy$.

2.4 Messungen am Reihenschwingkreis

Zur Bestimmung der Resonanzkurve, der Resonanzfrequenz und der Güte des Reihenschwingkreises wird der in Abbildung 1.4 gezeigte Aufbau verwendet. Da mittels des Oszillographen der Strom im Schwingkreis nicht direkt gemessen werden kann, wurde der Widerstand R eingebaut. Der Spannungsabfall u_x über dem Widerstand ist proportional zum Strom im Schwingkreis.

2.4.1 Resonanzkurve und Resonanzfrequenz

Die Resonanzfrequenz f_0 kann man leicht mittels Gleichung 11 ermitteln. Für den Fehler erhält man folgende Formel:

$$\sigma_{f_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma_L^2}{4CL^3} + \frac{\sigma_C^2}{4LC^3}}$$

Man errechnet schließlich $f_0 = 26.8 \pm 1.1 Hz$.

Die gemessene Resonanzkurve ist im Anhang graphisch wiedergegeben. Zur Bestimmung der Resonanzfrequenz ist die so ermittelte Kurve aber recht ungenau. Man kann lediglich sagen, daß die Resonanzfrequenz zwischen 25 und 27 Hertz liegen muß, weil die Stromänderung im Bereich um die Resonanzfrequenz minimal ist. Daher wurde die Resonanzfrequenz nochmals mittels Ermittlung der Phasennulldurchgangs zwischen Strom und Spannung gemessen. Für die Periodendauer T_0 der Resonanzfrequenz maßen wir $38 \pm 1 ms$, was $f_0 = 26.3 \pm 0.7 Hz$ entspricht. Damit liegt der gemessene Wert im Bereich des errechneten und umgekehrt.

Güte

In die Berechnung der Güte nach Gleichung 9 geht R mit ein. Wie in den Grundlagen erläutert sollte R bei f_0 nicht zu groß gegenüber den Scheinwiderständen von Kapazität und Induktivität sein. Da bei f_0 beide Scheinwiderstände bei 120Ω liegen, wurde $R = 100\Omega$ gewählt. Damit ergibt sich $Q_0 = 0.84 \pm 0.1$, wobei der Fehler mittels der folgenden Formel errechnet:

$$\sigma_{Q_0} = \sqrt{\left(\frac{L\sigma_{\omega_0}}{R + R_L}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0 \sigma_L}{R + R_L}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0 L \sigma_{R_L}}{R + R_L}\right)^2}$$

Zur Messung der Güte ermittelt man die Breite $\Delta\omega$ der Resonanzkurve an der Stelle, an der die Amplitude auf den $\sqrt{2}$ Teil des Maximalwertes abgefallen ist. Wir haben $\Delta\omega = 38 \pm 1V$ ermittelt.

Daraus errechnet man mittels Gleichung 12 $Q_0 = 0.70 \pm 0.04$, wobei zur Berechnung des Fehlerintervalls die folgende Formel benutzt wurde:

$$\sigma_{Q_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{f_0}}{\Delta f}\right)^2 + \left(\frac{f_0 \sigma_{\Delta f}}{\Delta f^2}\right)^2}$$

Damit überlappen sich die Wertebereiche der gemessenen und der errechneten Güte.