Das Betatron

Frank Pilhofer Kay Römer

24. Februar 1997

Zusammenfassung

Das Betatron ist ein kreisförmiger Beschleuniger, mit dem Elektronen auf mittlere Energien im MeV-Bereich beschleunigt werden können. Sein Vorteil ist der kompakte Aufbau, da die Elektronen von nur einem Magnetfeld sowohl auf einer Kreisbahn gehalten als auch beschleunigt werden. Das ist aber nur in einem bestimmten Bereich um den Sollkreis herum möglich, in dem das Magnetfeld bestimmte Bedingungen erfüllt.

Die Aufgabe dieses Versuches ist, die Betriebsparameter eines Betatronmodells zu messen und zu untersuchen, in welchem Bereich eine stabile Elektronenbahn möglich ist.

1 Einleitung

Energiereiche Strahlung entsteht, wenn energiereiche Teilchen auf ein Hindernis (Target) treffen. In vielen Bereichen der Physik oder der Medizin wird solche Strahlung benötigt, wobei mit der Energie der Strahlung oft auch die erreichbare Auflösung der Messung steigt. Aus diesem Grund gehören Beschleuniger, die Teilchen zum Zweck der Kollision mit einem Target auf hohe Energien beschleunigen, heute zum Alltag der Physik und Medizin.

Beschleunigt werden ausschließlich geladene Teilchen, auf die in einem elektrischen Feld die elektrische Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ wirkt. Eine erste Bauweise sind die *Linearbeschleuniger*, in denen die Teilchen auf einer geraden Strecke mehrfach durch mit Wechselspannung betriebene Beschleunigungsstrecken laufen. Ein Nachteil ist, daß die Größe des Geräts mit steigender Teilchenenergie wächst. Da die gesamte Röhre nach Möglichkeit zu evakuieren ist, wird schnell eine Obergrenze erreicht.

Viel attraktiver ist es, die Beschleunigungsstrecke kreisförmig aufzubauen. Hierzu wird ein zusätzliches magnetisches Feld erzeugt, welches geladene Teilchen nach der Lorentzkraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ auf einer kreisförmigen Bahn hält. Realisiert wurde das Prinzip zuerst mit dem *Zyklotron*. Zwischen zwei halbkreisförmigen Elektroden wird eine Wechselspannung angelegt. Die Elektroden sind von einem konstanten magnetischen Feld durchsetzt, das die Teilchen auf einer Kreisbahn hält. Die Wechselspannung wird so gesteuert, daß die Teilchen bei jedem Übergang zwischen den Elektroden eine Beschleunigung erfahren.

Die Frequenz der Wechselspannung ist zwar nicht von der Teilchengeschwindigkeit abhängig, wohl aber von deren Masse, die bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit wächst, was das Zyklotron insbesondere bei leichten Teilchen wie Elektronen schnell „aus dem Takt“ bringt. In einem *Synchrozyklotron* wird die Frequenz entsprechend dieses Zusammenhangs verändert, was leider auch einen kontinuierlichen Betrieb unmöglich macht; ein Synchrozyklotron kann nur noch gepulste Teilchenpakete liefern.

Ein weiterer Nachteil ist, daß der Bahnradius bei steigender Teilchenenergie wächst. Dabei steigt nicht nur die Gesamtgröße des Gerätes, auch die Erzeugung eines über eine große Fläche homogenen Magnetfeldes ist problematisch. In einem *Synchrotron* wird das Magnetfeld passend zur Teilchenenergie hochgefahren. Da sich die Teilchen nun auf einem Kreis mit konstantem Radius bewegen, braucht das Magnetfeld auch nur in diesem Bereich konstant bzw. überhaupt vorhanden zu sein. Die Teilchen werden in einer ringförmigen Röhre geführt. Analog zum Zyklotron ist der Ring an einer oder mehreren Stellen „geöffnet", an denen die Teilchen eine lineare Beschleunigungsstrecke durchlaufen.

In einem Synchrotron können fast beliebig hohe Teilchenenergien erreicht werden. Doch ist der Aufbau und die Abstimmung eines Synchrotrons eine schwierige Aufgabe, da das Magnetfeld und die Beschleunigungsspannung sehr genau gesteuert, eben synchronisiert werden müssen, damit die Teilchen die Beschleunigungsröhre nicht verlassen.

2 Das Betatron

Eine weiterer Beschleunigertyp ist das *Betatron*, welches im Vergleich zum Synchrotron einen sehr einfachen Aufbau besitzt. Es macht sich die Tatsache zunutze, daß ein zeitlich veränderliches magnetisches Feld ein elektrisches Wirbelfeld hervorruft. Anstelle getrennte magnetische und elektrische Felder synchronisieren zu müssen, wird hier nur mit einem Feld gearbeitet. Das magnetische *Führungsfeld* wird mit steigender Teilchenenergie hochgefahren und induziert das elektrische *Beschleunigungsfeld*.

Wideröe, der Erfinder des Betatrons, bezeichnete sein Gerät als „Strahlen-Transformator". Tatsächlich ist ein Betatron ähnlich einem Transformator aufgebaut, bei dem die Sekundärwicklung durch einen in einer evakuierten Röhre umlaufenden Elektronenstrahl ersetzt wurde.

Abbildung 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau des Betatrons. Von den zwei Helmholtzspulen wird ein homogenes Magnetfeld erzeugt. Der Eisenkern verstärkt die magnetische Feldstärke in Achsennähe. Über die Korrekturspulen können noch evtl. nötige Änderungen im Magnetfeld eingestellt werden. Die Elektronenbahn befindet sich im Inneren einer evakuierten Röhre inmitten des Magnetfeldes.

2.1 Grundlagen

Die Helmholtzspulen werden beim Betrieb des Betatrons von einem Wechselstrom durchflossen, der im Inneren der Spulen nach der zweiten Maxwellschen

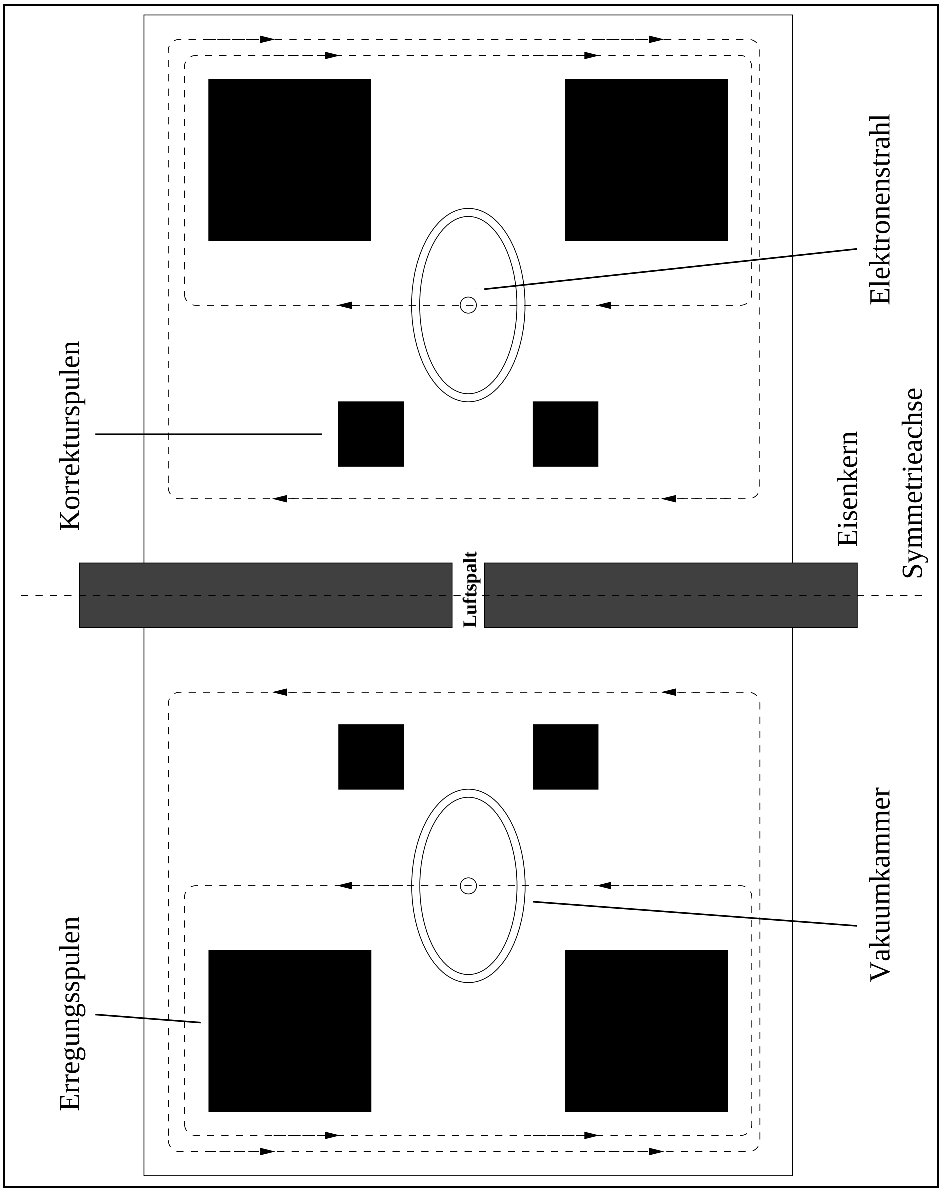

Abbildung 1: Aufbau eines Betatrons

Gleichung,
$\oint \vec{B}(t) \cdot \vec{ds} = \mu_0 \mu_r I(t)$
ein zeitlich veränderliches Magnetfeld hervorruft. Innerhalb einer Helmholtzspule herrst üblicherweise ein sehr homogenes Magnetfeld. Diese Homogenität ist bei uns allerdings durch den Eisenkern gestört. Innerhalb des Eisenkerns ist das magnetische Feld deutlich verstärkt. Wichtig ist, daß trotz der radialen Inhomogenität die Rotationssymmetrie des Magnetfeldes erhalten bleibt. Abbildung 2 zeigt den qualitativen Verlauf der magnetischen Feldstärke innerhalb der Spule.

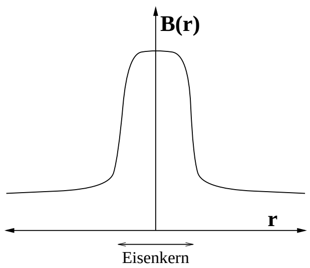

Abbildung 2: Feldverlauf im Inneren der Spule

Über den Luftspalt des Eisenkerns im Betatron läßt sich die relative Permeabilität μ_r und damit die magnetische Feldstärke innerhalb des Eisenkerns in gewissen Grenzen einstellen.
Das zeitlich veränderliche magnetische Feld induziert nach der ersten Maxwellschen Gleichung,

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_F \vec{B} d\vec{F} \tag{1}$$

ein elektrisches Wirbelfeld entlang der Elektronenbahn. Unter Definition des mittleren Magnetfeldes innerhalb einer Kreisfläche,

$$\bar{B}(r) = \frac{1}{\pi r^2} \oint_F \vec{B}(r) d\vec{F} \tag{2}$$

berechnet sich die elektrische Feldstärke nach Gl. (1) zu

$$\begin{aligned} 2\pi r \vec{E}(r) &= -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(r) \\ \vec{E}(r) &= -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(r). \end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Die Wideröe-Bedingung

Auf das zu beschleunigende Teilchen wirken im Betatron drei Kräfte, die in der nebenstehenden Abbildung 3 dargestellt sind. Die Lorentzkraft $\vec{F}_L$ entsteht durch die Bewegung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld, ist immer auf die Mitte des Kreises gerichtet und hält das Teilchen auf einer Kreisbahn. Ihr entgegen gerichtet ist die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z$. Die elektrischen Kraft $\vec{F}_E$ beschleunigt das Teilchen; ihr steht keine Kraft entgegen.
Eine Stabilitätsbedingung der Kreisbahn ist, daß sich Lorentzkraft und Zentrifugalkraft stets vom Betrag her gleichen, da das Teilchen sonst die Kreisbahn verläßt.

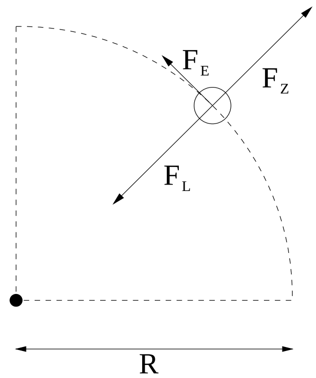

Abbildung 3: Kräfte auf ein geladenes Teilchen im Betatron

Wir erhalten also die Bedingung[1]

$$\frac{mv^2}{r} = -qvB(r)$$

[1] Da in einer stabilen Kreisbahn das Magnetfeld stets senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Teilchen steht, können hier die Beträge der Größen betrachtet und multipliziert werden. Beide Kräfte sind aber entgegengesezt, daher das Vorzeichen.

$$B(r) = -\frac{mv}{qr}. \tag{4}$$

Andererseits wirkt auf die Teilchen die elektrische Kraft $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Durch Einsetzen in Gleichung 3 ergibt sich

$$F_E(r) = -\frac{qr}{2}\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(r). \tag{5}$$

Für die beschleunigende Kraft eines Körpers gilt aber auch das zweite Newton'sche Gesetz[2]

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{p} = \frac{\partial}{\partial t}m\vec{v}. \tag{6}$$

Durch Einsetzen von (6) in die linke Seite von (5) erhalten wir

$$-\frac{qr}{2}\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(r) = \frac{\partial}{\partial t}mv,$$

woraus sich durch Integration über die Zeit

$$-\frac{qr}{2}\bar{B}(r) = mv \tag{7}$$

ergibt. Durch Einsetzen dieses Zusammenhangs in Gl. (4) ergibt sich die *Wideröe'sche Betatronbedingung*

$$B(r) = \frac{1}{2}\bar{B}(r). \tag{8}$$

Sie besagt, daß eine Kreisbahn am Radius r stabil ist, wenn die lokale magnetische Feldstärke des „Führungsfeldes" (da es für die Ablenkung zuständig ist) gleich der Hälfte der mittleren Feldstärke des „Beschleunigungsfeldes" innerhalb des Kreises ist. Die Kreisbahn an diesem Radius wird *Sollkreis* genannt.

Bei Betrachtung von Abbildung 2 sehen wir, daß wir durch die Vergrößerung des Luftspalts im Eisenkern und damit verbundener Verringerung der relativen Permeabilität die Feldstärke in der Mitte der Spule verändern können. Dabei verändern wir zwar das über den Gesamtfluß definierte $\bar{B}(r)$, während die lokale Flußdichte konstant bleibt. Durch die geeignete Wahl des Luftspalts läßt sich also ein Radius finden, an dem Gleichung (8) erfüllt ist.

2.3 Die Stabilitätsbedingung

Im vorigen Abschnitt haben wir einen Sollkreis bestimmt, der eine stabile Elektronenbahn zuläßt. Leider hilft uns das recht wenig, wenn *nur* diese Bahn stabil ist und Elektronen, die sich auf leicht abweichenden Bahnen befinden, nicht mehr beschleunigt werden können.

Als zweite Bedingung fordern wir daher, daß in der Nähe des Sollkreises rücktreibende Kräfte wirken, die die Elektronen zurück in Richtung des Sollkreises lenken. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn das Führungsfeld in der Umgebung des Sollkreises mit wachsendem Radius abnimmt, aber langsamer abnimmt als mit $\frac{1}{r}$, was man sich am Besten anhand Abbildung 4 klarmacht. Mathematisch

[2] Bei einer „Beschleunigung" im Bereich relativistischer Geschwindigkeiten ist die Masse zeitlich veränderlich!

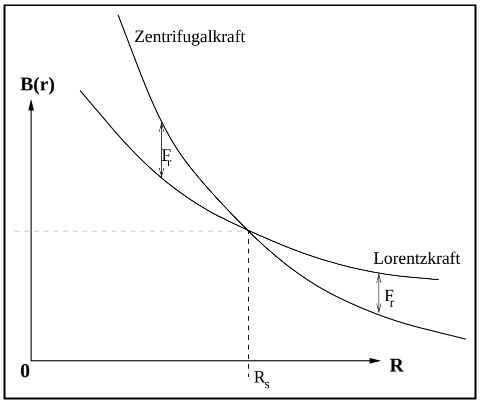

Abbildung 4: Die rücktreibende Kraft in der Umgebung des Sollkreises

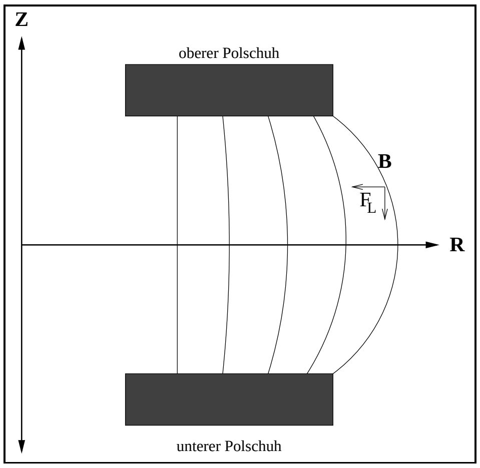

Abbildung 5: Die rücktreibende Kraft in axialer Richtung

formulieren läßt sich der Zusammenhang am einfachsten über die Ableitungen der beiden Kräfte nach dem Radius. Damit die Lorentzkraft schwächer abnimmt als die Zentrifugalkraft, muß gelten:

$$\frac{\partial}{\partial R} F_Z < \frac{\partial}{\partial R} F_L. \tag{9}$$

Durch Einsetzen der bekannten Formeln für beide Seiten erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{mv^2}{r^2} &< qv \frac{\partial}{\partial R} B(r) \\ -1 &< \frac{qr}{mv} r \frac{\partial}{\partial R} B(r). \end{aligned} \tag{10}$$

Setzen wir weiterhin die Gleichgewichtsbedingung am Sollkreis (4) ein, ergibt sich

$$-1 < \frac{r}{B(r)} \frac{\partial}{\partial R} B(r). \tag{11}$$

Gleichung (11) stellt also sicher, daß die Elektronenbahnen in radialer Richtung stabilisiert werden. Wir wollen aber auch fordern, daß die Bahnen in axialer Richtung stabilisiert werden, also daß auch rücktreibende Kräfte in Richtung der Sollkreis*ebene* wirken, falls ein Elektron diese verläßt. Um diese Bedingung zu erfüllen, reicht es zu fordern, daß die magnetische Feldstärke mit zunehmendem Radius überhaupt *abnimmt*. Nach Abbildung 5 sind dann die Feldlinien in der Umgebung der Mittelebene leicht gekrümmt, und die Lorentzkraft zerfällt in eine Komponente, die wie bisher der Zentrifugalkraft entgegenwirkt und eine senkrecht dazu stehende rücktreibende Kraft in Richtung der Mittelebene.

Die zweite Bedingung läßt sich so schreiben, daß die Ableitung der Lorentzkraft in Abhängigkeit des Radius negativ sein muß.

$$\frac{\partial}{\partial R} F_L = qv \frac{\partial}{\partial R} B(r) < 0. \tag{12}$$

Durch geeignete Erweiterung von (12) läßt sich die Formel mit (11) in die Formulierung von *Steenbeck* zusammenfassen:

$$0 > n = \frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} > -1, \tag{13}$$

wobei n als Feldindex bezeichnet wird und ein Maß für die Schwingfähigkeit des Systems ist.

Tatsächlich führen die Elektronen in einem Betatron Schwingungen um den Sollkreis aus. Stationär betrachtet sind diese sogenannten „Kerst-Schwingungen“ ungedämpft, doch ergibt ein genauer Ansatz, daß eine Dämpfung aufgrund der zunehmenden Masse (und damit auch *Trägheit*) der Elektronen eintritt. Durch diesen Zusammenhang wird der gesamte Elektronenstrahl fokussiert – ein sehr wünschenswerter Nebeneffekt!

Die Stabilitätsbedingungen lassen sich als Mulde um den Sollkreis auffassen, in der die Elektronen um den Mittelpunkt laufen. Der Vergleich mit einem „Potentialtopf“ ist gar nicht mal so verkehrt. Am Sollkreis – dem tiefsten Punkt der Mulde – haben die Elektronen keine radiale oder axiale Geschwindigkeitskomponente, also die „geringste“ Energie.

2.4 Betrieb des Betatrons

Es zeigt sich, daß das Betatron nur im ersten Viertel der Periode des Wechselstroms möglich ist, in der sowohl $B(t)$ als auch dessen zeitliche Ableitung positiv sind. Nachdem $B(t)$ das Maximum erreicht hat, wird die zeitliche Ableitung des magnetischen Feldes negativ. Dabei dreht sich nach Gl. (1) die Richtung des induzierten elektrischen Wirbelfeldes um – und die Elektronen werden wieder abgebremst.

Auf der anderen Seite der Zeitachse ist $B(t)$ noch negativ, und die Lorentzkraft weist vom Kreismittelpunkt weg.

Wir erkennen, daß der Einschußzeitpunkt kritischer ist als der Zeitpunkt der Herausführung der Elektronen. Werden die Elektronen zu früh eingespeist, ist überhaupt kein Betrieb möglich, da keine stabile Kreisbahn existiert. Nach Erreichen des Scheitelwertes von $B(t)$ bleiben die Elektronen zwar auf ihrer Bahn, sind aber nicht optimal beschleunigt.

Üblicherweise werden die Elektronen von einer Glühkathode vorbeschleunigt und tangential auf den Sollkreis eingeschossen. Ein falscher Einschußzeitpunkt hat zur Folge, daß die Elektronen einen für die Bahn auf dem Sollkreis zu großen oder zu kleinen Impuls haben und die Gleichgewichtsbedingung (4) verletzt wird. Je nach Differenz vom Sollimpuls werden die Teilchen mehr oder weniger stark um den Sollkreis schwingen; das falsche Timing macht sich also in einer schlechten Strahlfokussierung bemerkbar.

Das Herausführen der Elektronen kann beispielsweise durch das „bewußte" Verletzen der Wideröe-Bedingung (8) geschehen, indem lokale Hilfsspulen mit einem Stromstoß angeregt werden, die an einem bestimmten Punkt des Kreises die Lorentzkraft verringern und die Teilchen somit an diesem Punkt die Kreisbahn verlassen.

Zu beachten ist auch, daß das „Fassungsvermögen" des Betatrons beschränkt ist. Werden zu viele Elektronen eingespeist, so sind die Abstoßungskräfte untereinander nicht mehr vernachlässigbar, was sich wiederum in einer schlechten Fokussierung des Ausgangsstrahls niederschlägt.

Der Nachteil eines Betatrons, daß nur ein Viertel der Schwingungsperiode ausgenutzt werden kann, wird in einem „Zweistrahl"-Betatron gemildert. Werden zu Beginn der negativen Halbwelle Elektronen eingeschossen, so werden sie auch beschleunigt, allerdings in der anderen Richtung als während der positiven Halbwelle. Es ist zwar nicht möglich, beide Strahlen durch den gleichen Ausgang laufen zu lassen, dennoch ist das Prinzip praktisch um zwei Versuche gleichzeitig mit schnellen Elektronen zu speisen.

2.5 Endenergie

Die wichtigste Frage beim Entwurf eines Betatrons ist natürlich die maximal erreichbare Energie der beschleunigten Teilchen. Ein genauer Ansatz über das Integral der auf der zurückgelegten Strecke wirkenden Kräfte ist unübersichtlich kompliziert, weshalb wir hier ein paar Vereinfachungen machen. Die Elektronengeschwindigkeit ist bereits nach wenigen Umläufen praktisch gleich der Lichtgeschwindigkeit; eine Vereinfachung ist die Annahme, daß sich die Elektronen während der *gesamten* Beschleunigung mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Die Arbeit ist definiert als Kraft mal Weg,

$$A = \int \vec{F} d\vec{s}. \tag{14}$$

In diesem Fall betrachten wir die elektrische Kraft, die auf die Teilchen wirkt. Unter Benutzung der ersten Maxwellschen Gleichung (1) wird daraus

$$A(t) = q \oint \vec{E} d\vec{s} = -q \frac{\partial}{\partial t} \oint_F \vec{B} d\vec{F}, \tag{15}$$

wobei das Flächenintegral über das Kreissegment gebildet werden muß, das das Teilchen umläuft. Betrachten wir einen gesamten Umlauf auf der Kreisbahn, so erhalten wir unter Benutzung von (2) und Einsetzen eines Differentialquotienten für die zeitliche Ableitung der magnetischen Feldstärke

$$A_k = -q\pi r^2 \frac{\bar{B}(t_2) - \bar{B}(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{16}$$

Unter der Annahme, daß sich unsere Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, benötigen die Teilchen für einen Umlauf der Kreisbahn die Zeit $\Delta t = \frac{2\pi r}{c}$. Dabei entsteht eine Teleskopsumme. Da am Ende der Beschleunigung die magnetische Feldstärke ihr Maximum erreicht, und wir die Teilchen bei $\bar{B}(t) = 0$ einspeisen, erhalten wir für die Endenergie

$$A = -\frac{1}{2} q c r_s \hat{\bar{B}}(r_s) \tag{17}$$

Die maximal erreichbare Energie ist also für fest vorgegebene Teilchen (also festes q) von dem Radius und der mittleren magnetischen Feldstärke innerhalb des Radius jeweils linear abhängig. Die maximale Stärke des magnetischen Feldes ist beschränkt durch die Leistungsfähigkeit von Magneten, der Radius ist beschränkt durch die Schwierigkeit, ein großflächiges magnetisches Feld aufzubauen.

Eine weitere Einschränkung, die insbesondere bei kleinen Kreisradien in Erscheinung tritt, ist die Synchrotronstrahlung. Je höher die Energie und je enger der Kreisradius, desto mehr Energie geben die Teilchen in Form von Strahlung nach außen ab.

3 Messungen

In dem vorliegenden Modell eines Betatrons sind anstelle einer evakuierten Röhre auf verschiedenen Radien Drahtschleifen eingelassen. Unter Speisung der Spulen mit einem Wechselstrom der Frequenz $f = 6250\mathrm{Hz}$ konnte die in die Schleifen induzierte Spannung gemessen werden. Aus diesen Größen und den bekannten Radien können alle Betriebsparameter des Betatrons errechnet und ein möglicher Sollkreisradius bestimmt werden. Die Messung wird mit verschiedenen Werten für die Dicke des Luftspalts (siehe Abbildung 1) wiederholt.

Eine Spannung ist nichts anderes als das Integral entlang elektrischer Feldlinien. Aus der gemessenen Spannung läßt sich unmittelbar die elektrische Feldstärke am Schleifenradius ablesen. Da die eingelassenen Drahtschleifen geschlossen sind, ergibt sich

$$U(r) = \oint \vec{E} d\vec{s} = 2\pi r E(r) \tag{18}$$

und damit

$$E(r) = \frac{1}{2\pi r} U(r) \tag{19}$$

Andererseits ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2) sowie der Sinusförmigkeit der magnetischen Feldstärke

$$\begin{aligned} U(t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \oint_F \vec{B} d\vec{F} \\ &= -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(t) \\ &= -\pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} \hat{\bar{B}} sin(\omega t) \\ &= -\pi r^2 \hat{\bar{B}} \omega cos(\omega t) \end{aligned} \tag{20}$$

Unter Übergang zu den Scheitelwerten läßt sich mittels dieser Gleichung aus der gemessenen induzierten Spannung in einer Schleife die mittlere magnetische

Feldstärke im Inneren der Schleife berechnen:

$$\bar{B}(r) = \frac{-1}{\pi r^2 \omega} U(r) \tag{21}$$

Wir wollen zeigen, daß die elektrische Feldstärke am Sollkreis einen Extremwert besitzt. Hierfür benutzen wir, daß der magnetische Fluß innerhalb eines Kreises unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie auch als

$$\Phi = \oint_F \vec{B} d\vec{F} = \int_0^r 2\pi r B(r) dr \tag{22}$$

geschrieben werden kann. Auf diese Weise ergibt sich aus der ersten Maxwellschen Gleichung (1)

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} &= -\frac{\partial}{\partial t} \oint_F \vec{B} d\vec{F} \\ 2\pi r E(r) &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r 2\pi r B(r) dr \\ E(r) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r 2\pi r B(r) dr \end{aligned} \tag{23}$$

Durch Ableiten dieser Gleichung nach dem Radius erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} E(r) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r 2\pi r B(r) dr - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r 2\pi r B(r) dr \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} r B(r) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(r) - \frac{\partial}{\partial t} B(r) \end{aligned} \tag{24}$$

Man erkennt, daß die letzte rechte Seite gerade der Wideröe-Bedingung (8) entspricht, und am Sollkreis zu 0 wird, womit die Behauptung, daß $E(r)$ am Sollkreis extremal wird, bewiesen ist. Betrachten wir auch noch die zweite Ableitung, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} E(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} B(r) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} B(r) \tag{25}$$

Ersetzen wir den ersten Term nach der Wideröe-Bedingung, und die partielle Ableitung von $B(r)$ nach dem Radius durch den Feldindex, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} E(r) &= -\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial t} B(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} B(r) - \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial t} B(r) \\ &= \frac{-1}{r} (1+n) \frac{\partial}{\partial t} B(r) \end{aligned} \tag{26}$$

Ist die Stabilitätsbedingung erfüllt, ist also $0 > n > -1$, so ist die zweite Ableitung negativ und wir erkennen, daß die elektrische Feldstärke am Sollkreis ein Maximum besitzt.[3] Da die elektrische Feldstärke aber *negativ* ist, hat die

[3] Hier irrt die dem Versuch beiliegende Dokumentation, in die sich ein Vorzeichenfehler eingeschlichen hat.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$U[V]$	1.500	1.740	1.967	2.198	2.430	2.679	2.938	3.154
$\widehat{B}(r)[-mT]$	8.922	7.348	6.306	5.547	4.978	4.523	4.139	3.842
$\hat{E}(r)[-\frac{V}{m}]$	7.690	7.517	7.403	7.340	8.311	7.317	7.331	7.319
$\frac{\partial E}{\partial r}$		0.212	0.147	0.083	0.038	-0.007	-0.018	0.018

Tabelle 1: Werte für $d = 16$mm

	1	2	3	4	5	6	7	8
$U[V]$	1.389	1.640	1.878	2.118	2.358	2.613	2.878	3.098
$\widehat{B}(r)[-mT]$	8.262	6.925	6.020	5.344	4.831	4.407	4.055	3.775
$\hat{E}(r)[-\frac{V}{m}]$	7.122	7.085	7.068	7.072	7.095	7.138	7.181	7.188
$\frac{\partial E}{\partial r}$		0.045	0.023	-0.006	-0.031	-0.055	-0.057	-0.010

Tabelle 2: Werte für $d = 20$mm

auf die Elektronen wirkende beschleunigende elektrische *Kraft* $\vec{F}(r) = -e\vec{E}(r)$ ein Minimum.

Durch den Vergleich zweier nebeneinanderliegender Spulen können wir näherungsweise die Ableitung der elektrischen Feldstärke nach dem Radius als Differenzenquotient

$$\frac{\partial}{\partial r}E(r) \approx \frac{E(r_1) - E(r_2)}{r_1 - r_2} \tag{27}$$

bestimmen. Durch die so bestimmten diskreten Punkte der Ableitung kann eine Kurve gelegt werden. Hat die Kurve einen Nulldurchgang, so haben wir einen möglichen Sollkreis gefunden. Falls die Ableitung bei wachsendem Radius fällt, so ist die zweite Ableitung negativ und wir wissen, daß die Stabilitätsbedingung erfüllt ist. Streng genommen ist eine negative zweite Ableitung nur eine notwendige aber noch nicht hinreichende Bedinung für die Erfüllung der Stabilitätsbedingung, da laut (26) die zweite Ableitung auch für einen positiven Feldindex negativ ist. Wie in 2.3 beschrieben müssen wir weiterhin fordern, daß die magnetische Feldstärke bei zunehmendem Radius abnimmt.

3.1 Ergebnisse

Wie erklärt wurden für Luftspaltdicken von 8 bis 22 Millimeter die in den Spulen induzierten Spannungen gemessen. Daraus wurde die mittlere magnetische Feldstärke, die Stärke des elektrischen Feldes am Spulenradius sowie die näherungsweise Ableitung der elektrischen Feldstärke nach dem Radius berechnet. Im Anhang befinden sich die kompletten Tabellen.

Allerdings wurde nicht berücksichtigt, daß das Spannungsmessgerät den *Effektivwert* der Wechselspannung angezeigt hat. Auch sind wir wie die dem Versuch beiliegende Dokumentation über das Vorzeichen von $U(t) = -\dot{\Phi}$ gestolpert.Bei allen berechneten Größen fehlt daher noch ein Faktor $-\sqrt{2}$. Der Faktor beeinflußt aber die Bestimmung des Sollkreises nicht.

Tabellen 1 und 2 zeigen beispielsweise die gemessenen und berechneten Werte für die Spaltbreiten 16mm und 20mm. Im Anhang befinden sich die Differenzenquotienten beider Meßreihen gegenüber dem Radius aufgetragen.

Bei größerem Schleifenradius nimmt die induzierte Spannung zu, da mehr magnetischer Fluß umschlossen wird. Die mittlere Feldstärke im Inneren des

$d[mm]$	8	10	12	14	16	18	20	22
$r_s[cm]$	–	–	–	9.02	8.24	7.48	6.55	5.98
$\widehat{B}(r_s)[-mT]$	–	–	–	4.199	4.523	4.909	5.513	5.904
$E_{max}[keV]$	–	–	–	56.81	55.90	55.08	54.17	52.96

Tabelle 3: Sollkreisradien bei verschiedener Dicke des Luftspalts

Kreises nimmt ab, was bedeutet, daß die Feldstärke mit zunehmendem Radius abnimmt und sich der magnetische Fluß sozusagen auf mehr Fläche verteilen muß. Klar abzulesen sind die Nulldurchgänge der Ableitung.

Tabelle 3 zeigt mögliche Werte für Sollkreise bei verschiedenen Luftspaltdicken sowie die Amplitude der mittleren magnetischen Feldstärke im Inneren des Sollkreises und die maximal erreichbaren Endenergien. Für die ersten drei Meßreihen ließ sich kein Sollkreis finden. Wie man an den Tabellen im Anhang ablesen kann, ist für alle Werte außer für $d = 14$mm die Stabilitätsbedingung erfüllt.

3.2 Fehlerabschätzung

Gemessen wurde nur die in die Spulen induzierte Spannung, wobei man mit einer Fehlerannahme von 5% auf der sicheren Seite liegt. Es kann aber auch davon ausgegangen werden, daß die angegebenen Radien der Drahtschleifen auch einen leichten Fehler beinhalten und evtl. nicht exakt kreisförmig verlegt sind.

Der Meßfehler der Spannung schlägt sich in der Messung der mittleren magnetischen und elektrischen Feldstärke in gleicher Größe nieder.

Ein weiterer Fehler kommt bei der Näherung der Ableitung der elektrischen Feldstärke mittels eines Differenzenquotienten ins Spiel. Dennoch sind an einer interpolierten Kurve durch die diskreten Meßpunkte die Nulldurchgänge sehr gut ablesbar, weshalb sich der Sollkreisradius auch mit recht guter Genauigkeit bestimmen läßt.

4 Zusatzfragen

Warum sich das Zyklotron nicht zum Beschleunigen von Elektronen eignet, wurde bereits in der Einleitung erwähnt. Bei der Annäherung der Teilchen an die Lichtgeschwindigkeit ändert sich die Zyklotronfrequenz, die von der Masse der Teilchen abhängt. Die leichten Elektronen nähern sich in einem Beschleuniger schnell der Grenzgeschwindigkeit. Protonen haben eine fast um den Faktor 2000 größere Ruhemasse, sie beschleunigen daher auch viel langsamer. Auch komplette Ionen lassen sich mit einem Zyklotron gut beschleunigen.

Beim Betatron spricht im Prinzip nichts dagegen, auch andere Teilchen als Elektronen zu beschleunigen. Bei der Herleitung der beiden Stabilitätsbedingungen wurde weder eine bestimmte Ladung noch Masse der Teilchen vorausgesetzt. Einzig bei der Abschätzung der Endenergie wurde vorausgesetzt, daß sich die Teilchengeschwindigkeit sehr schnell der Lichtgeschwindigkeit annähern, was bei schwereren Teilchen nicht erfüllt ist.

Könnte man das magnetische Feld im Betatron um den Faktor 500 bei gleicher Geometrie des Feldes verstärken (so daß sich der Sollkreis nicht verschiebt), so ergibt sich nach Gleichung (17) eine um den Faktor 500 vergrößerte Endenergie. Wählt man z.B. einen Luftspalt von $d = 16$mm, so liegt die Endenergie bei ca. 28MeV. Nach $E = mc^2$ beträgt dann das Gewicht eines Elektrons $4.98 \cdot 10^{-29}$kg oder 54.6 Ruhemassen. Unter der Annahme, daß die Elektronen sich ständig mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, legen sie während der Beschleunigungsdauer von 40μs (bei einer Frequenz der Wechselspannung von $f = 6250$Hz) eine Strecke von 12km zurück, durchlaufen die Kreisbahn also ca. 23000 mal.