Versuchsprotokoll

Martin Opitz, Frank Pilhofer

Mittwoch, 10. November 1993

Physikalisches Anfängerpraktikum Teil II

Spiegelgalvanometer

Versuch 20 / Platz A

Inhaltsverzeichnis

Problemstellung 2

Grundlagen 2

- Die gedämpfte Schwingung 2
  - Schwingfall 2
  - Kriechfall 3
  - Grenzfall 3
- Drehspulgalvanometer 3

Durchführung der Messungen 4

- Einleitung 4
- Versuchsaufbau 5
- Aperiodischer Grenzwiderstand 6
- Innerer Widerstand 6
- Stromempfindlichkeit 7
- Schwingungsdauer 7

Problemstellung

In diesem Versuch soll der Arbeitspunkt, der innere Widerstand und die Empfindlichkeit eines Spiegelgalvanometers experimentell bestimmt werden.

Das Spiegelgalvanometer ist ein hochempfindliches Meßinstrument zur Messung kleiner Ströme im μA-bereich und darunter. Das traditionelle Galvanometer kann einerseits zur Bestimmung fester Ströme und andererseits für Ladungen (Stromstöße) verwendet werden; im zweiten Fall spricht man von einem ballistischen Galvanometer.

Grundlagen

Die gedämpfte Schwingung[1]

Eine gedämpfte Schwingung wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (1)$$

beschrieben. Dabei ist φ die Auslenkung der Schwingung, β die Abklingkonstante und ω_0^2 die Kreisfrequenz, die die Schwingung bei fehlender Dämpfung besitzen würde. Die Lösung der DGL ergibt sich, wenn $\varphi = Ae^{Bt}$ ersetzt wird. Aus der Gleichung wird $AB^2e^{Bt} + 2AB\beta e^{Bt} + A\omega_0^2 e^{Bt} = 0$ bzw, nach Kürzen, $B^2 + 2B\beta + \omega_0^2 = 0$ mit den Lösungen $B = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \beta \pm z$.

Es werden drei Fälle unterschieden.

Schwingfall

Im ersten Fall ist $\beta < \omega_0$, d.h. $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega$ ist imaginär; Durch Einsetzen der Ergebnisse in (1) ergibt sich die Lösung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t}\left(\cos\omega t + \tfrac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right). \qquad (2)$$

Dies möchte man als Standardfall der gedämpften Schwingung bezeichnen; der Körper schwingt mit stetig abnehmender Amplitude um seinen Ruhepunkt.

Die Schwingungsdauer T, die sich aus der Schwingungsdauer $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ als $T = T_0\sqrt{1 + \frac{\ln^2 k}{4\pi^2}}$ (k ist das Amplitudenverhältnis zweier aufeinanderfolgender Schwingungen) berechnet, bleibt nahezu konstant.

---

1 An dieser Stelle soll keine umfassende Einführung in die Welt der Schwingungen gegeben werden; vielmehr stellt das Aufgezählte eine knappe Zusammenfassung alles nötigen dar. Verwendet wird insbesondere der Anhang von: W.H. Westphal, "Physikalisches Praktikum", wo noch ein paar Zwischenschritte mehr erläutert sind.

Kriechfall

Zweitens wird der Fall $\beta > \omega_0$ behandelt, also ist die Wurzel $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \gamma$ und damit auch das gesamte Ergebnis der Differentialgleichung reell. Dieses ist durch die (2) ähnliche Darstellung $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t}\left(\cosh \gamma t + \frac{\beta}{\omega}\sinh \gamma t\right)$ gegeben. Die trigonometrischen Funktionen wurden durch ihre hyperbolischen Gegenstücke ersetzt. Insbesondere sieht man, daß die Auslenkung zu jedem Zeitpunkt positiv ist; durch Ableiten erfährt man außerdem, daß die Winkelgeschwindigkeit stets ein negatives Vorzeichen besitzt. Der Körper bewegt sich also *asymptotisch kriechend* auf den Ruhepunkt zu.

Der Kriechfall ist wahrscheinlich der physikalisch uninteressanteste Fall. An ihm läßt sich weder eine vernünftige Schwingungsdauer noch Dämpfung ablesen.

Grenzfall

Im Gegensatz dazu ist der Grenzfall (besonders im durchgeführten Versuch) deutlich interessanter. Er stellt den Grenzwert zwischen Schwingen und Kriechen dar. Formelmäßig ist hier $\beta = \omega_0$ bzw. $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \omega = 0$. Die zeitliche Auslenkung kann durch Grenzwertübergang aus (2) gewonnen werden. Das Kosinusglied wird 1; außerdem ist $\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin \omega t}{\omega} = t$. Wird dies in (2) eingesetzt, folgt $\varphi = \varphi_0 e^{-\omega_0 t}\left(1 + \omega_0 t\right)$. Auch hier ist die Auslenkung stets positiv und die Winkelgeschwindigkeit stets zum Ruhepunkt gerichtet. Während der Körper sich diesem im Kriechfall asymptotisch genähert hat, fällt die Auslenkung hier exponentiell ab. Schon nach einer 'Schwingungsdauer', d.h. $t = T$ beträgt die Auslenkung nur noch $\varphi = \varphi_0 e^{-2\pi}\left(1 + 2\pi\right) \approx 0{,}014\varphi_0$, ist optisch also kaum noch von der Ruhelage zu unterscheiden.

Drehspulgalvanometer

Das Herz eines Drehspulgalvanometers ist ein spiralfedergelagerter[2], spulenumwickelter Weicheisenzylinder, der sich im Magnetfeld eines Permanentmagneten befindet. Fließt durch die Spule ein Strom, so entsteht eine tangentiale Lorentzkraft auf die Spule, der Weicheisenzylinder beginnt, sich zu drehen. Eine Gegenkraft wird durch die Spiralfeder aufgebaut. Jeweils dem Stromfluß entsprechend werden sich beide Kräfte bei einer bestimmten Auslenkung die Waage halten.[3]

Das interessanteste an dieser Versuchsbeschreibung ist die Tatsache, daß die Spule federgelagert, also im Grunde schwingungsfähig ist. Weiterhin dreht sich die Spule in einem Magnetfeld. Dabei wird eine nach der Lenz'schen Regel der Eingangsspannung entgegengesetzte Spannung induziert.

---

[2] In diesem Fall wird die rücktreibende Kraft über die Torsionskraft eines Fadens erzeugt

[3] Quelle: Andreas Friedel und Frank Pilhofer, Protokoll zum Versuch 0 des Elektronik-Praktikums

Uns soll hier nur der Fall interessieren, daß sich das Galvanometer zu einem Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt maximaler Auslenkung befindet. Bis hierher floß ein Strom durch die Spule (der ja zu dem Ausschlag geführt hat). Nun wird dieser Strom abgeschaltet; das Galvanometer sich selbst überlassen.

Bei der Drehung des Weicheisenzylinders im Magnetfeld wird, wie bereits bemerkt, eine Spannung induziert. Für diese gilt $U_i = -n\dot{\Phi} = -G\dot{\varphi}$. $G = A\mu_0 H$ ist die sogenannte "dynamische Galvanometerkonstante" und entspricht dem magnetischen Fluß in der Fläche der Drehspule. Der Spannung folgt natürlich ein Stromfluß durch das Galvanometer und den äußeren Stromkreis $I = \frac{U}{R} = -\frac{G}{R_G + R_1 + R_2}\dot{\varphi}$. Und - hier schließt sich der Kreis - der somit induzierte Strom bewirkt wieder eine der Drehbewegung der Spule entgegengesetzte Kraft bzw. ein Drehmoment der Größe $N = -\frac{G^2}{R_G + R_1 + R_2}\dot{\varphi}$; hier spricht man von einer induktiven Rückkopplung.

Dieses Glied ist natürlich beim Aufstellen der Differentialgleichung (1) zu berücksichtigen und spiegelt sich in dem β wieder.

Hier werden die Fallunterschiede des vorangegangenen Kapitels wichtig. An der hier herrschenden Definition von

$$\beta = \frac{1}{2\theta}\left(\rho + \frac{G^2}{R_G + R_1 + R_2}\right) \qquad (3)$$

erkennt man, daß die Fälle, die sich durch den Wert von $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ergeben, gesteuert werden können. Die äußeren Widerstände sind variabel, der hier interessante Grenzfall kann also von Hand einjustiert werden. Durch Auflösen von (3) ergibt sich die Bedingung

$$R_1 + R_2 = \frac{G^2}{2\sqrt{\theta D} - \rho} - R_G \ . \qquad (4)$$

An den durchgeführten Betrachtungen erkennt man, warum ein schwingungsfähiges System, wie es jedes Drehspulmeßinstrument ist, doch schon nach sehr kurzer Zeit und ohne Überschwingen den richtigen Wert anzeigen kann. Die Widerstände sind im Inneren des Geräts stets so gewählt, daß das zugrundeliegende Galvanometer im Grenzfall betrieben wird. Auf diese Weise stellt sich der Zielwert (sei er 0 oder ein beliebiger Ausschlag) unverzüglich ein.

Durchführung der Messungen

Einleitung

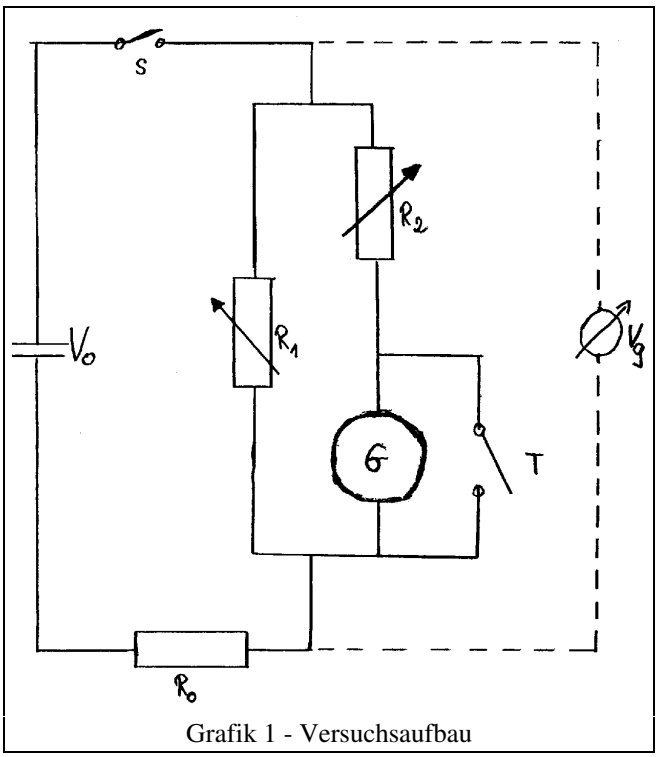
In den Messungen werden zu einem gegebenen Spiegelgalvanometer die wichtigsten Größen wie Schwingungsdauer, aperiodischer Grenzwiderstand und Stromempfindlichkeit bestimmt.

Das Gerät war auf einem separaten, eigens aufgehängtem Tisch aufgebaut. Dies ist nötig, da ansonsten jedes Rütteln am Tisch unerwünschte Pendelbewegungen eingeleitet hätte. Die einzige Verbindung zur Außenwelt lief über die beiden Anschlußkabel.

Im Galvanometer selbst ist ein Spiegel an einem Faden aufgehängt. Um alle möglichen Störeinflüsse zu beseitigen, wurde auf eine Skala verzichtet. Vielmehr wird der Ausschlag indirekt abgelesen, wofür es zwei Möglichkeiten gibt. Erstens kann ein Lichtstrahl auf den Spiegel gerichtet werden, welcher das Licht auf eine entsprechende Skala wirft. Andererseits kann auch die Skala beleuchtet und durch ein Fernrohr über den Spiegel beobachtet werden. In diesem Versuch beschränken wir uns auf die zweite Möglichkeit.

Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in der nebenstehenden Skizze dargestellt. Die Quellspannung $V_0 = 5V$ wird zunächst über einen Strombegrenzer $R_0 \approx 10k\Omega$ geteilt. Um das Galvanometer herum erkennt man sehr schön den Stromkreis, der bei öffnen des Schalters *S* entsteht. In diesem befinden sich noch die Widerstände R_1 und R_2, über die sich der aperiodische Grenzfall einstellen läßt. Während *S* jedoch geschlossen ist, dient $R_1 \langle\langle R_G + R_2$ auch noch als Stromteiler. Bereits an der Dimensionierung der Widerstände, die nicht viel Strom über das Galvanometer laufen lassen, erkennt man die Empfindlichkeit des Geräts.



Grafik 1 - Versuchsaufbau

Der Taster *T* dient zum Beruhigen und Stoppen der Pendelbewegungen des Galvanometers. Wird dieser geschlossen, so werden Ein- und Ausgang kurzgeschlossen, der Strom läuft also nur noch über den Innenwiderstand des Geräts, jedoch nicht mehr über die äußeren Widerstände. Nach Gleichung 3 erhält die Abklingkonstante β damit ihren größtmöglichen Wert, die Bedingung $\beta > \omega_0$ ist erfüllt, die Wurzel $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ reell; die Pendelbewegung geht also sofort in den Kriechfall über. Wird der Taster am Nulldurchgang gedrückt, wird das Pendeln sofort gestoppt.

Aperiodischer Grenzwiderstand

Im ersten Versuch werden die Widerstände R_1 und R_2 so gewählt, daß sich der aperiodische Grenzfall einstellt (d.h. Gleichung 4 muß erfüllt sein). Dies war bei $R_1 = 2\Omega,\ R_2 = 250\Omega$ der Fall. Der gesamte Grenzwiderstand beträgt somit $R_a = R_1 + R_2 = 252\Omega$.

Es ist hier mehr oder weniger unnötig, eine Fehlerrechnung durchzuführen. Die verwendeten Widerstände hatten laut Beschriftung eine Toleranz von 0,1%; Die Messung beruhte jedoch auf dem optischen Eindruck des Grenzfalls. Der Fehler, den Verstand und Augen hierbei verursachen, ist nur schwer abzuschätzen.

Innerer Widerstand

Nun soll aus gewonnenen Meßdaten der innere Widerstand des Galvanometers berechnet werden. An Galvanometer und R_2 liegt die Spannung $V_G = \frac{R_1}{R_0+R_1}V_0$ an, wobei der Widerstand R_1 im Nenner vernachlässigt werden kann. Durch das Galvanometer fließt so der Strom $I_G = \frac{V_G}{R_2+R_G} \approx \frac{R_1}{R_0(R_2+R_G)}V_0$.

Unter der Annahme, daß der Ausschlag des Galvanometers proportional zum Stromfluß ist (was bei kleinen Winkeln gut erfüllt ist), werden die Widerstände R_2' und R_2'' bei zwei Ausschlägen α' und α'' gemessen. Dabei sei $\alpha'' = \frac{1}{2}\alpha'$. Unter dieser Annahme gilt natürlich auch $\alpha' = cI_G' \approx c\frac{R_1}{R_0(R_2'+R_G)}$ und $\alpha'' = cI_G'' \approx c\frac{R_1}{R_0(R_2''+R_G)} \approx \frac{c}{2}\frac{R_1}{R_0(R_2'+R_G)}$. Nach ein wenig kürzen und Kehrwert nehmen folgt also $R_2''+R_G \approx 2R_2'+2R_G$ und

$$R_G \approx R_2'' - 2R_2' \qquad (5)$$

Nach unseren Meßwerten $R_2' = 200\Omega$ und $R_2'' = 450\Omega$ ergibt sich ein Innenwiderstand von $R_G \approx 50\Omega$.

Hier ist es zunächst gefährlich, den Fehler zu betrachten, da in den letzten Schritten nur mit "Ungefähr" gerechnet wird. Dennoch wissen wir, daß das Weglassen von R_1 bei der Bestimmung von V_G einen Fehler von $< \frac{10\Omega}{10000\Omega} = 0{,}1\%$ verursacht hat. Dieser Fehler tritt beim Gleichsetzen beider Ausschlagsgleichungen auf beiden Seiten auf, verdoppelt sich also.

Allerdings darf nicht vergessen werden, daß die Gleichung darauf beruht, daß der zweite Ausschlag genau die Hälfte des ersten betrug. Hier spielen also schon wieder zwei Fehler herein; einerseits das Ablesen des ersten Ausschlags und dann das Einstellen auf den zweiten Ausschlag. Gönnen wir beidem einen Fehler (da bei kleinen Ausschlägen gearbeitet wurde) von 2%, fällt der obige Fehler schon nicht mehr ins Gewicht, und der gesamte Fehler addiert sich zu $R_G = 50\Omega \pm 4\%$

Stromempfindlichkeit

Die Stromempfindlichkeit ist eine Proportionalitätskonstante zwischen dem Stromfluß im Galvanometer und des Ausschlags, also genau unser *c* von oben. Je größer diese ist, desto kleinere Ströme können noch angezeigt werden. Die Stromempfindlichkeit soll hier mit E_I bezeichnet werden.

Nach oben ist daher $E_I = \frac{\alpha}{I}$. Da jedoch auf der verwendeten Skala keine Winkel, sondern nur der Gesamtausschlag beobachtet werden kann, wird der Winkel mit $a = r\alpha$ substituiert, wobei *r* der Abstand der Skala von der Rotationsachse des Galvanometers ist. Der Strom *I* kann wie oben verwendet werden, wobei hier der exakte Wert Verwendung finden soll:

$$E_I = \frac{a}{rI} = \frac{a(R_2+R_G)}{rV_G} = \frac{a(R_2+R_G)(R_1+R_0)}{rV_0R_1} \qquad (6)$$

Es werden folgende Werte eingesetzt: $a = 56mm \pm 1mm$, $R_0 = 10k\Omega \pm 0{,}1\%$, $R_1 = 0{,}5\Omega \pm 0{,}2\%$, $R_2 = 200\Omega \pm 0{,}1\%$, $R_G = 50\Omega \pm 4\%$, $r = 0{,}61m \pm 0{,}5cm$, $V_0 = 5V$. Bei den Widerstandswerten wurde beachtet, daß jeder einzelne Widerstand der Dekade eine Toleranz von 0,1% hat. So mußten z.B. für R_1 die Stecker für 0,4 und 0,1 Ohm gezogen werden; der Fehler addiert sich daher zu 0,2%.

Beim Einsetzen erhält man den Wert $E_I = 9{,}18 \cdot 10^7 \frac{mm}{Am} \pm 5\%$. Eine weitere Unsicherheit kann natürlich auch in der (hier als stabil und exakt angenommenen) Versorgungsspannung versteckt sein.

Schwingungsdauer

Zuletzt wird noch die Güte des eingestellten aperiodischen Grenzfalls bestimmt. Hierfür wird die Schwingungsdauer des Schwingfalls mit der Einstelldauer des Grenzfalls verglichen. Schließlich gilt nach den Gleichungen, daß beim letzteren schon nach $t = T$ schon eine sehr gute Näherung (1,4%) der Ruhelage erreicht ist.

Für den Schwingfall wurden zwei Messungen durchgeführt; jeweils wurden drei Perioden gestoppt. Da die Schwingungsdauer bei drei Pendelbewegungen trotz der gedämpften Schwingung nur fast konstant bleibt, ergibt sich schon vor der Messung ein Fehler von ca. 2% (unter der Annahme, daß die Dämpfung $k = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{1}{2}$ ist). Auch bei der Zeitmessung, die parallel mit 2 Digitaluhren durchgeführt wurde, ergibt sich noch eine Fehlmessung von $\pm 0{,}1s$.

So ergibt sich der Meßwert für die Schwingungsdauer von $T = 1{,}96s \pm 5{,}5\%$.

Unter den gleichen Überlegungen ist die Einstelldauer im aperiodischen Grenzfall $T = 2{,}07s \pm 5{,}5\%$. Hier kam noch erschwerend hinzu, daß die Messung im Prinzip subjektiv ist, da jedes Auge den Einstellpunkt anders abschätzen kann. Da die Werte jedoch von zwei Personen innerhalb einer Toleranz von $\pm 0{,}05s$ lagen, sind die Fehler sicher nicht zu niedrig angesetzt.