Versuchsprotokoll

Martin Opitz, Frank Pilhofer

Mittwoch, 05. Januar 1994

Physikalisches Anfängerpraktikum Teil II

Messung von Induktivitäten in der Wechselstrombrücke

Versuch 17 / Platz 1

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 2

Grundlagen 2

- Spulen im Wechselstromkreis 2
- Zusammenschalten von Spulen 3
- Wheatstone'sche Brücke 4

Versuchsdurchführung 5

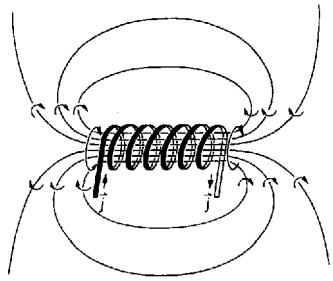
- Bestimmung von Einzelinduktivitäten 6
  - Fehlerrechnung 6
- Schaltungen 7
- Auswertung 7

Einleitung

In diesem Versuch sollen Induktivitäten unbekannter Spulen in einer Wheatstone'schen Brücke bestimmt werden. Auch werden die Auswirkungen verschiedener elektrischer und magnetischer Kopplungsfälle auf die Induktivität bestimmt.

Grundlagen

Spulen im Wechselstromkreis



Grafik 1 - Magnetfeld einer Spule

Eine Spule ist - kurz gesagt - ein aufgewickelter Draht. Dabei ist ein aufgewickelter Draht jedoch mehr als die Summe seiner Einzelteile (bzw. der Drahtabschnitte der einzelnen Windungen). Fließt in einem elektrischen Leiter ein Strom, so bildet sich um ihn herum ein magnetisches Feld. Werden viele Drähte zusammengeführt, so überlagern sich die magnetischen Felder. Im Fall einer Spule ergibt sich Bild 1; innerhalb der Spule überlagern sich die Felder konstruktiv und erzeugen ein nahezu homogenes magnetisches Feld, außerhalb werden die Feldlinien schnell dünner (im Idealfall einer unendlich langen Spule aus unendlich dünnen Drähten ist das Feld außerhalb der Spule genau 0).

Das geht solange gut, wie nur ein konstanter Strom durch die Spule fließt. Ändert sich dieser, so ändert sich das magnetische Feld proportional. Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt nun, daß dieses zeitlich veränderliche magnetische Feld eine Spannung in den Drahtwindungen selber *induziert*. Diese Spannungen addieren sich aus jeder Drahtwicklung und können an den äußeren Enden gemessen werden.

Die Überlegungen zeigen, daß die induzierte Spannung proportional zum Stromfluß in der Spule sein muß. Die Proportionalitätskonstante L wird als Induktivität der Spule bezeichnet und besitzt die Einheit *Henry* $[L] = \frac{Vs}{A} = H$.

$$|U| = L\left|\frac{dI}{dt}\right| \qquad (1)$$

Für Wechselspannungen stellt die Spule eine Art Widerstand dar. Ein Spannungsanstieg an der Spule zieht erst mit Verzögerung einen Stromanstieg in der Spule nach sich. Dieser Sachverhalt drückt sich in einer Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom aus.

In der komplexen Wechselstromrechnung vereinfacht sich die quantitative Beschreibung einer Spule. Über Differentialgleichungen kann der Spule ein komplexer Widerstand zugeordnet werden[1]:

---

[1] Herleitung siehe z.B. Martienssen, Einführung in die Physik II

$$Z = i\omega L \qquad (2)$$

In der Praxis ist noch ein weiterer Faktor in Betracht zu ziehen. Die aus aufgewickeltem Draht bestehende Spule besitzt neben ihrer reinen Induktivität auch noch einen reellen ohm'schen Widerstand, der Berücksichtigung finden muß. Mit diesem erweitert sich Formel 2 zu

$$Z = R + i\omega L \qquad (3)$$

Zusammenschalten von Spulen

Werden mehrere Spulen (oder, der Einfachheit halber, zwei) zusammengeschaltet, so ändert sich auch deren Gesamtinduktivität. Werden die Spulen räumlich isoliert, so gibt es nur zwei Schaltmöglichkeiten, einmal in Reihe und einmal parallel. Bei der Reihenschaltung fließt durch beide Spulen der gleiche Strom, in beiden Spulen wird daher in gleicher Weise ein Magnetfeld gespeichert. Es ist leicht einzusehen, daß sich dabei die Induktivitäten, die ja vom Strom abhängen, addieren müssen: $L_{ser} = L_1 + L_2$.

Werden die Spulen parallel geschaltet, so teilt sich der Strom in beide Spulen auf. Da hier mit Wechselstrom gearbeitet wird, verteilt sich der Strom allerdings nicht aufgrund der ohm'schen, sondern aufgrund der komplexen Widerstände der Spulen. Sind deren ohm'sche Widerstände jedoch klein genug, so gilt $\frac{1}{L_{par}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$.

Interessant wird es, wenn wir die räumliche Isolierung der Spulen nicht mehr voraussetzen. Damit ist die eine Spule dem Magnetfeld der anderen Spule ausgesetzt und wird von ihr beeinflußt. Sind die Felder geeignet ausgerichtet, so kann eine Stromänderung in der einen Spule eine Spannung in der anderen Spule induzieren und umgekehrt. Der Proportionalitätsfaktor dieser Beeinflussung wird als Gegeninduktivität oder wechselseitige Induktivität bezeichnet. Es gilt

$$u_1 = \pm M \frac{di_2}{dt} \text{ und } u_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} \ . \qquad (4)$$

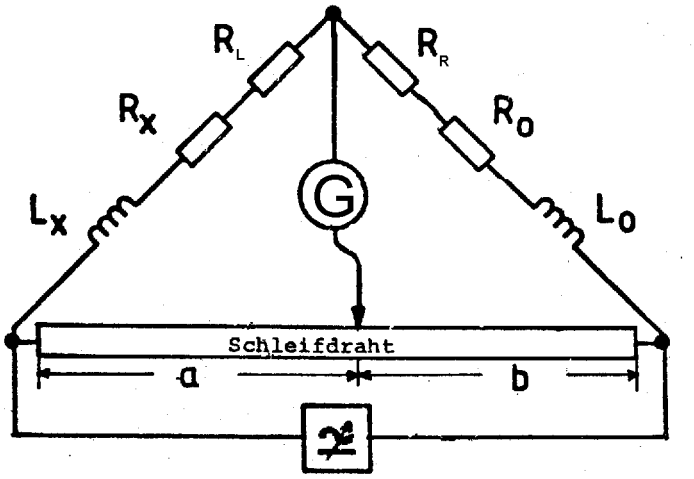
Betrachten wir die Reihenschaltung. Sind die Magnetfelder beider Spulen parallel ausgerichtet, so ist zu erwarten, daß die Überlagerung konstruktiv wirkt. In diesem Fall werden wir als Gesamtinduktivität der Schaltung $L_{ser,+} = L_1 + L_2 + 2M$ erwarten. Der Faktor 2 resultiert daher, daß sowohl die eine Spule eine Spannung in der anderen induziert als auch die andere in der einen.

Wird eine der Spulen umgedreht, so werden wir das umgekehrte erwarten, eben daß beide Gegeninduktionen der eigentlichen Gesamtinduktion entgegenwirken: $L_{ser,-} = L_1 + L_2 - 2M$. Durch Messung dieser beiden Fälle läßt sich die Gegeninduktivität leicht bestimmen: $M = \frac{1}{4}\left(L_{ser,+} - L_{ser,-}\right)$.

Werden die Spulen jedoch senkrecht zueinander aufgebaut, so können die Magnetfelder keine Spannungen induzieren, die Gesamtinduktivität ist in diesem Fall (zumindest idealerweise) so groß wie im isolierten Fall.

Wheatstone'sche Brücke

Die Wheatstone'sche Brücke ist eine recht allgemeine Schaltung. Im einfachsten Fall werden in ihr unbekannte Widerstände ermittelt, indem sie mit bekannten Widerständen verglichen werden. Mit der Thomson-Schaltung, einer Abart der Wheatstone-Brücke, können Widerstände noch im Milliohmbereich gemessen werden. Der prinzipielle Aufbau der Wheatstone-Brücke ist nebenstehend aufgezeichnet. Hier braucht die Grundschaltung, mit der auch "normale" Widerstände bestimmt werden können, nicht geändert zu werden. Wie bereits erläutert, stellt auch eine Spule einen gewissen Widerstand dar, nur eben einen komplexen.



Grafik 2 - Prinzipieller Aufbau der Wheatstone-Brücke

Wird die Brücke von Gleichstrom durchflossen, so besitzen unsere idealisierten Spulen keinen Widerstand und können getrost vergessen werden. Nur der durch R_X symbolisierte ohm'sche Widerstand ist von Interesse. Der Abgriff am Schleifdraht kann nun so eingeregelt werden, daß an beiden Enden des Galvanometers das gleiche Potential anliegt (dieses also Null anzeigt). In diesem Punkt verhält sich der Spannungsteiler R_X, R_0 genauso wie der Spannungsteiler am Schleifdraht a, b. In diesem Punkt gilt

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{a}{b} \ . \qquad (5)$$

Im Gleichspannungsbetrieb wurden nur die ohm'schen Widerstände betrachtet. Wird die Gleichspannung durch eine Wechselspannung ersetzt, so können direkt die komplexen Widerstände bestimmt werden. Wir wollen nun, daß sich die Effekte beider Spulen genau aufheben, d.h. daß der Quotient $\frac{Z_X}{Z_0} = \frac{R_X + i\omega L_X}{R_0 + i\omega L_0} = \frac{\frac{a}{b}R_0 + i\omega L_X}{R_0 + i\omega L_0}$ reell wird. Ist dies der Fall, so werden wir einen Punkt auf dem Schleifdraht mit reellem $\frac{a'}{b'} = \frac{Z_X}{Z_0}$ finden, an dem sich beide komplexen Spannungsteiler gleich (und darüber hinaus wie ein reeller Spannungsteiler) verhalten, so daß an diesen Punkten stets die gleiche Phase der Wechselspannung mit gleicher Amplitude anliegt. Wir erkennen, daß diese Bedingung zum Beispiel dann erfüllt ist, wenn

$$\frac{L_X}{L_0} = \frac{a}{b} \qquad (6)$$

ist. In diesem Fall gilt $\frac{Z_X}{Z_0} = \frac{\frac{a}{b}R_0 + \frac{a}{b}i\omega L_0}{R_0 + i\omega L_0} = \frac{a}{b}$. Nach Einstellen der Gleichstrombedingung brauchen wir also nur noch die Induktivität der Spule ändern, um die Wechselstrombedingung zu erhalten. Auch die Nullpunktmessung kann am gleichen Punkt erfüllen, da wir mit dem komplexen Spannungsteiler die gleiche Aufteilung wie beim Gleichstrom mit dem reellen Spannungsteiler erhalten.

Einzig und allein das Galvanometer muß, da es keine Nullpunktabgleiche von Wechselstrom gestattet, durch ein sinnvolleres Schaltelement wie z.B. ein Oszilloskop oder einen Kopfhörer ersetzt werden.

Eine gesonderte Bemerkung vielleicht noch zum Gleichstromabgleich. Dieser muß besonders genau erfolgen. Je ungenauer hier gearbeitet wird, desto schlechter läßt sich der Wechselstromabgleich durchführen. Mathematisch läßt sich das ganze am obigen komplexen Quotienten ablesen, dessen Imaginärteil nicht mehr auf Null zu kriegen ist; physikalisch erklärt sich der Effekt an den unterschiedlichen Phasenverschiebungen der beiden -hier- unterschiedlichen RL-Gliedern.

Versuchsdurchführung

Die Schaltung wird nach Grafik 2 aufgebaut. Gegenüber des Bildes werden in der Praxis jedoch zwei Änderungen eingebaut. Die eine ist das bereits besprochene Oszilloskop zum Wechselstromabgleich. Bei diesem gibt es jedoch noch das Problem, daß ein Oszilloskop stets Spannungen gegenüber Masse mißt, wir aber keinen Punkt der Schaltung erden können. Als Ausweg wird die Spannung aus der Schaltung mit einem einfachen Transformator an das Oszilloskop übertragen. Aus diesem Grund taugt der Oszillograph auch nur zum Wechselspannungsabgleich, da die Gleichspannungen natürlich nicht vom Trafo übertragen werden.

Zweitens wird neben den Spulen auch noch ein Stöpselwiderstand eingebaut (je nach Bedarf im linken oder rechten Schenkel des Dreiecks). Dieser wird verwendet, um den Gleichspannungsabgleich möglichst in die Mitte des Schleifdrahtes zu verschieben. Dort sind die Meßwerte für a und b am größten und besitzen daher den kleinsten Ablesefehler.

Als Vergleichsspule L_0 dient ein Variometer, welches zwar festen Widerstand, aber regelbare Induktivität besitzt. Dieses besteht aus zwei Spulen. Wird deren Stellung gegeneinander über ein Einstellrad verändert (gedreht), so ändert sich die Gesamtinduktivität, die freundlicherweise an einer Skala ablesbar ist.

Bestimmung von Einzelinduktivitäten

Um das Verfahren zu testen, werden zunächst die drei einzelnen, dem Versuch beigegebenen Spulen isoliert durchgemessen. Der Widerstand einer jeden Spule läßt sich nach dem Gleichstromabgleich nach Formel 5 berechnen. Ist der Wechselstromabgleich vollzogen, so folgt die Induktivität nach Formel 6. Die Formel für den unbekannten Widerstand muß jedoch noch um den zusätzlich eingebauten Stöpselwiderstand erweitert werden. Wir erhalten $R_X = \left(R_0 + R_R\right)\frac{a}{b} - R_L$.

Nr[2]	a [mm]	b [mm]	R_L [Ω]	R_R [Ω]	R_0 [Ω]	L_0 [mH]	R_X [Ω]	L_X [mH]
1	548±0,8%	452±0,8%	10±1%	0	34±1%	25,2±1,6%	31,2± 1,4%	30,55±2%
2	480±0,8%	520±0,8%	10±1%	0	34±1%	17,3±2,3%	21,3± 2,3%	15,94±2,6%
3	408±1,0%	592±0,7%	0	10±1%	34±1%	2,54±4%	30,3± 1,5%	1,75±4,2%

Fehlerrechnung[3]

Bei den Längenmessungen wurde ein Fehler von ±4mm zugrunde gelegt. Der hohe Wert rechtfertigt sich dabei nicht durch schiefen Blick; vielmehr wurde hier ebenfalls der Fehler bei der Abgleichbedingung miteinbezogen. Am Stöpselwiderstand und am Innenwiderstand des Variometers waren keine Angaben zur Güte gemacht, weshalb von einem Fehler von 1% ausgegangen wird. Auch der Induktivität des Variometers wird eine Güteklasse 1 unterstellt. Bei einer maximalen Induktivität von 40mH bedeutet dies einen Fehler von 0,4mH. Bei der Messung zu Spule 3 ist zu beachten, daß das Variometer umgesteckt wurde und nur noch eine maximal Induktivität von 10mH besaß, weshalb sich auch der Fehler auf 0,1mH verändert.

Für die Fehlerauswirkungen wird wieder der Gauß'sche Fehlerfortpflanzungssatz verwendet. Im Falle der Induktivität berechnet sich der prozentuale Fehler recht einfach aus den prozentualen Fehlerquadraten der drei Komponenten: $\frac{\Delta L_x}{L_x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2\left(\frac{\Delta L_0}{L_0}\right)^2}$. Bei der oben aufgeführten Formel für den Widerstand der Spule wird die Rechnung aufgrund der mehreren Wechsel zwischen Addition und Multiplikation deutlich unübersichtlicher. Leitet man sich die Fehler der einzelnen Unterterme nacheinander ab, so erhält man schließlich den Gesamtfehler $\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{1}{R_x}\sqrt{\left[\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \frac{\Delta^2 R_0 + \Delta^2 R_R}{\left(R_0 + R_R\right)^2}\right]\cdot\frac{a^2}{b^2}\left(R_0 + R_R\right)^2 + \Delta^2 R_L}$. Die nach diesen Formeln berechneten Fehlerwerte sind bereits in der Tabelle eingetragen. Beide Formeln liegen natürlich auch den folgenden Fehlerrechnungen zugrunde.

---

2 Hier ist gemeint: Spule Nr.

3 Heute unter dem Motto: "Krieg' ich Prozente?"

Schaltungen

Als nächstes werden die Spulen 1 und 2 in einem Stromkreis zusammengeschlossen. Dabei werden alle 6 möglichen Kopplungsfälle durchgetestet:

1. Reihenschaltung mit parallelen Magnetfeldern
2. Reihenschaltung mit senkrechten Magnetfeldern
3. Reihenschaltung mit antiparallelen Magnetfeldern
4. Parallelschaltung mit parallelen Magnetfeldern
5. Parallelschaltung mit senkrechten Magnetfeldern
6. Parallelschaltung mit antiparallelen Magnetfeldern

Es ergeben sich folgende Werte:

Nr[4]	a [mm]	b [mm]	R_L [Ω]	R_R [Ω]	R_0 [Ω]	L_0 [mH]	R_X [Ω]	L_X [mH]
1	543±0,8%	457±0,8%	0	10±1%	34±1%	42,4±1%	52,5± 1,4%	50,38±1,5%
2	606±0,7%	394±1,0%	0	0	34±1%	30,5±1,3%	52,2± 1,6%	46,81±1,8%
3	543±0,8%	457±0,8%	0	10±1%	34±1%	35,9±1,2%	52,2± 1,4%	42,57±1,6%
4	490±0,8%	510±0,8%	20±1%	0	34±1%	11,8±3,4%	12,7± 4,2%	11,34±3,6%
5	490±0,8%	510±0,8%	20±1%	0	34±1%	11±3,7%	12,7± 4,2%	10,57±3,9%
6	491±0,8%	509±0,8%	20±1%	0	34±1%	9,9±4%	12,7± 4,2%	9,53±4,2%

Auswertung

Nachdem wir mit den Meßwerten der ersten Reihe (Einzelmessungen) zufrieden waren, werden wir von der zweiten Meßreihe nicht überrascht. Bereits an den ohm'schen Widerständen der Reihen- und Parallelschaltung erkennen wir, daß zumindest die Gleichspannungsabgleichung problemlos geklappt hat.

Aus der ersten Meßreihe erhalten wir die Widerstände $R_{L,1} = 31,2\Omega \pm 1,4\%$ und $R_{L,2} = 21,3\Omega \pm 2,3\%$. Werden diese in Reihe geschaltet, ergibt sich ein ohm'scher Gesamtwiderstand von $R_{Ges} = 52,5\Omega \pm 1,8\% = (52,5 \pm 0,95)\Omega$. Bei der Parallelschaltung ergibt sich $R_{Ges} = 12,7\Omega \pm 1,5\% = (12,7 \pm 0,2)\Omega$. Alle in der zweiten Meßreihe bestimmten Widerstände liegen damit deutlich innerhalb der Toleranz.

Die gleichen Überlegungen lassen sich natürlich auch mit den Induktivitäten und den in der Theorie genannten Formeln anstellen. Hierbei müssen wir uns in der zweiten Meßreihe natür-

---

[4] Hier ist logischerweise gemeint: Kopplungsfall Nr.

lich auf die Fälle senkrechter Magnetfelder beschränken, da sich die Spulen in anderen Fällen gegenseitig beeinflussen.

Bei der Reihenschaltung wurde verlangt, daß sich die Induktivitäten addieren. Die eine Spule besitzt die Induktivität $L_1 = 30,55mH \pm 2\%$, die zweite $L_2 = 15,94mH \pm 2,6\%$. Die Addition ergibt $L_{Ges} = 46,49mH \pm 1,6\% = (46,49 \pm 0,75)mH$ und stimmt mit dem gemessenen Wert überein[5]. Auch der Wert für die Parallelschaltung enttäuscht uns nicht. Für den Kopplungsfall 5 berechnen wir $L_{Ges} = 10,47mH \pm 1,8\% = (10,47 \pm 0,2)mH$, was genau um 0,1mH neben dem Meßwert liegt.

Das letzte, was noch übrigbleibt, ist die Bestimmung des gegenseitigen Einflusses der Spulen in den Kopplungsfällen 1 und 3, der Gegeninduktivität. In den Grundlagen wurde hierfür Formel 4 aufgestellt. Nach ihr folgt $M = \frac{1}{4}(50,38 - 42,57)mH \pm 13\% = 1,95mH \pm 13\%$. Die Größe ist mit einem großen Fehler behaftet, was jedoch nicht weiter verwunderlich ist, da sie als (kleine) Differenz zweier großer Werte zustandekommt.

---

[5] Übereinstimmung sei hier dadurch definiert, daß der gemessene Wert in der Fehlertoleranz des errechneten Wertes liegt und Umgekehrt.