Versuchsprotokoll

Martin Opitz, Frank Pilhofer

Dienstag, 09. Juni 1993

Physikalisches Anfängerpraktikum

Hydrodynamik

Versuch 7/3

Inhaltsverzeichnis

Einleitung ... 2

- Problemstellung des Versuchs ... 2
- Beschreibung der Meßmethode ... 2

Beschreibung der physikalischen Grundlagen ... 3

- Strömung idealer Flüssigkeiten ... 3
- Laminare Strömungen ... 3
- Druckanzeige an den Manometern ... 5

Versuchsdurchführung ... 5

- Druckabfall in einer laminaren Strömung ... 5
  - Beschreibung ... 5
  - Meßwerte ... 6
  - Fehlerrechnung ... 6
- Überprüfung der Bernoulli'schen Gleichung ... 6
  - Beschreibung ... 6
  - Meßwerte ... 7
  - Diskussion der Meßergebnisse ... 7
  - Fehlerrechnung ... 8
- Nachweis des Hagen - Poiseuille Gesetzes ... 8
  - Beschreibung ... 8
  - Meßwerte ... 9
  - Fehlerrechnung ... 9

Zum guten Schluß ... 9

- Konstanten ... 9
- Ein Dank ... 9

Einleitung

Problemstellung des Versuchs

Dieser Versuch untersucht das Strömungsverhalten von Flüssigkeiten. Nach einer kurzen Einführung in das Verhalten idealer Flüssigkeiten, die sich zwar sehr schön beschreiben lassen, aber nicht beobachtet werden können folgen Versuche zur Beschreibung laminarer Strömungen, die sich schon eher beobachten lassen aber schwieriger zu beschreiben sind. Untersucht werden der Druckabfall in einer laminaren Strömung, die Bernoulli'sche Gleichung und das Gesetz von Hagen-Poiseuille.

Beschreibung der Meßmethode

An einen in ausreichender Höhe befindlichen Wasserbehälter wird zunächst ein Hauptventil und dann die Meßapparatur angeschlossen (Abb. 1). Sie besteht aus 5 Kapillaren, von denen jede wiederum mit einem Ventil versehen ist, um den Wasserstrom je nach Wunsch durch eins der Rohre zu lenken. An den ersten zwei Kapillaren sind jeweils 3 Manometer angebracht, an denen der Wasserdruck abgelesen werden kann. Die hinteren beiden Kapillaren sind nur mit zwei Manometern bestückt, ein drittes wird hier nicht benötigt. Vor Beginn des Versuches wird der Wasserbehälter mit einer ausreichenden Menge destilliertem Wasser gefüllt, weiterhin werden die Kapillaren und die Verbindungsrohre geflutet, um die Meßergebnisse verfälschenden Luftblasen zu vertreiben.

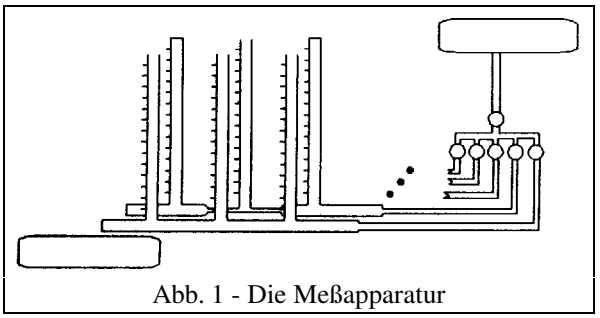

Abb. 1 - Die Meßapparatur

Für die Messungen, die für jede Versuchsreihe analog durchgeführt werden, werden beide Ventile, d.h. das Hauptventil und das entsprechende Ventil der Versuchsreihe annähernd gleich weit geöffnet. Das Wasser strömt durch die Apparatur und an den Manometern stellt sich ein Druck ein. Jede Messung dauert 60 Sekunden. In dieser Zeit werden die Drücke an den Manometern zweimal abgelesen, um die Ergebnisse zu mitteln. Weiterhin wird mit einem Meßbecher die Wassermenge gemessen, die in dieser Zeit die Kapillare passiert. Aus diesem Wert kann die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers ermittelt werden.

Die Meßwerte werden in der ersten Versuchsreihe benutzt, um den Druckabfall in einer laminaren Strömung nachzuweisen und quantitativ zu beschreiben. Zweitens soll mittels der Bernoulli'schen Gleichung gearbeitet werden, mit der der Durchmesser einer verjüngten Stelle bestimmt werden soll. Auch in der letzten Versuchsreihe sollen Rohrquerschnitte ermittelt werden, diesmal jedoch in Anwendung des Gesetzes von Hagen-Poiseuille.

Beschreibung der physikalischen Grundlagen

Strömung idealer Flüssigkeiten

Bei der Berechnung von Strömungen idealer Flüssigkeiten werden Reibungskräfte innerhalb der Flüssigkeit wie zwischen Flüssigkeit und dem Glas des Rohres vernachlässigt. Auch wird die Flüssigkeit als ideal inkompressibel angenommen. Weiterhin entstehen bei idealen Flüssigkeiten keine Turbulenzen im Strom, die auch für größere Abweichungen sorgen können.

Schon die Anzahl von 3 Punkten, die bei idealen Flüssigkeiten vernachlässigt werden zeigt, daß man auf diese Weise nur einen recht ungenauen Blick auf die Realität werfen kann. Insbesondere bei den hier betrachteten Rohrquerschnitten führen Turbulenzen und Reibungskräfte zu merkbaren Abweichungen von den folgenden Gesetzen.

Die bei einer idealen Strömung geltenden Gesetzmäßigkeiten sind in Abb. 2 dargestellt. Wegen der Inkompressibilität der hier zu betrachtenden Flüssigkeit ist die Dichte ρ überall konstant. Betrachtet man einen Abschnitt eines Rohres, so muß daher die Menge der an einer Seite zugeführten Flüssigkeitsmenge pro Zeiteinheit der an der anderen Seite in der gleichen Zeit austretenden Menge entsprechen: $\frac{\Delta V_{ein}}{\Delta t} = \frac{\Delta V_{aus}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta V_{ein} = \Delta V_{aus}$. Da sich diese Beobachtung bis auf infinitesimal kleine Rohrabschnitte Δx fortsetzen läßt, kann man schließen, daß die Durchflußmenge an jeder Stelle des Rohres konstant sein muß. Dies gilt natürlich auch, wenn sich der Rohrquerschnitt S ändert. Auch bei geändertem Querschnitt muß das Gesetz gelten, es folgt für die Durchflußmengen:

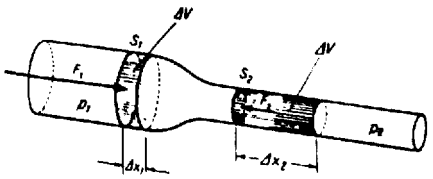

Abb. 2 - In einer idealen Strömung

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S_i \Delta x_i}{\Delta t} = S_i v_i = \text{const} \quad \forall \text{i} \ . \tag{1}$$

Der auf die Flüssigkeit wirkenden innere Druck $p_i = \frac{F_i}{S_i}$ führt zu der Kraft $F_i = p_i S_i$, die die Flüssigkeit vorantreibt. Dabei wird die Arbeit $\Delta W_i = F_i \Delta x_i = p_i S_i \Delta x_i = p_i \Delta V$ geleistet. Diese Arbeit ändert sich je nach Rohrquerschnitt. Da sich auch die Strömungsgeschwindigkeit ändert, muß der Unterschied in der Arbeit dem Unterschied der kinetischen Energien entsprechen: $\Delta W_1 - \Delta W_2 = (p_1 - p_2)\Delta V = \frac{1}{2}\rho \Delta V \left(v_1^2 - v_2^2\right)$. Hieraus folgt die Bernoulli'sche Gleichung,

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = p_0 \ , \tag{2}$$

wobei p_0 der innere Druck der Flüssigkeit ist.

Laminare Strömungen

Bei den laminaren Strömungen wird ein wichtiger Aspekt realer Strömungen, die innere Reibung und die Reibung zwischen Flüssigkeit und Wand, einbezogen. Ein wichtiger Faktor für diese Überlegungen ist die Viskosität der Flüssigkeit, ein Maß für die Zähigkeit.

Bei der idealen Strömung ist von einer homogenen Geschwindigkeitsverteilung über das gesamte Rohr ausgegangen worden. Diese Vereinfachung kann hier nicht mehr hingenommen werden. Aufgrund der Reibungen zwischen Rohr und Flüssigkeit muß sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit direkt an der Wand der Geschwindigkeit der Wand selber annähern, diese ist natürlich 0.

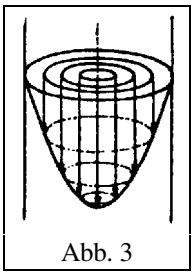
Abb. 3

Daher bildet sich eine radiale Geschwindigkeitsverteilung aus. In der Mitte des Rohres hat die Geschwindigkeit ein Maximum, nach außen hin nimmt die Geschwindigkeit ab. Dies ist in Abbildung 3 dargestellt.

Für die Ableitung des Gesetzes von Hagen-Poiseuille betrachte man einen zylinderförmigen Ausschnitt der Flüssigkeit mit dem Radius r und der Länge l (Abb. 4). Auf seiner Länge tritt in der Strömung, eben weil sie nicht ideal ist, eine Druckdifferenz auf. Daher wirkt auf den Zylinder die treibende Kraft $\Delta F = \pi r^2 \Delta p$. Aufgrund der radialen Geschwindigkeitsverteilung im Strom besteht zwischen der Drehachse des Zylinders und der umgebenden Flüssigkeit eine Geschwindigkeitsdifferenz. Aufgrund der inneren Reibung der Flüssigkeit folgt die Reibungskraft $F_R = 2\pi r l \tau$. Dabei ist τ, die Schubspannung, die auf die gesamte Oberfläche des Zylinders wirkt, definiert als $\tau = -\eta \frac{dv}{dr}$. Da die Geschwindigkeit in Richtung des Rohres nach (1) konstant sein muß, müssen sich beide Kräfte gegenseitig aufheben, denn ein Ungleichgewicht würde in einer stetig steigenden bzw. sinkenden Flußgeschwindigkeit resultieren. Daher ist $\pi r^2 \Delta p = 2\pi r l \tau$.

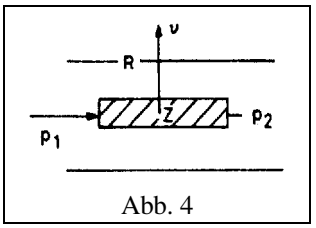

Abb. 4

Mit erwähntem Differentialquotienten folgt

$$-\frac{\tau}{\eta} = \frac{dv}{dr} = -\frac{r\Delta p}{2\eta l} \ . \qquad (3)$$

Zur Bestimmung der eigentlichen Fließgeschwindigkeit kann (3) unter Beachtung der Randbedingungen $v(R) = 0, \quad \lim_{r\to 0} \frac{dv}{dr} = 0$ integriert werden:

$$v(r) - v(0) = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \int_0^r r dr = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 \qquad (4)$$

Für $r = R$ kann aus (4) und der Randbedingung gefolgert werden:

$$v(R) - v(0) = -v(0) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \qquad (5)$$

Aus (4) und (5) kann so die tatsächliche Geschwindigkeit bestimmt werden:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) \qquad (6)$$

Die gewünschte Durchflußmenge $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, die nun das Rohr passiert, läßt sich als das Volumen des Rotationsparaboloides berechnen, der durch (6) gegeben und in Abb. 3 gezeigt ist. Die entgültig gewünschte Formel zur Berechnung von Strömungsgeschwindigkeiten laminarer Strömungen ist daher

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = 2\pi \frac{\Delta p}{4\eta l} \int_0^R \left(R^2 - r^2 \right) r dr = \frac{\pi \Delta p}{2\eta l} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \frac{\pi}{8} \frac{R^4}{\eta l} \Delta p \ . \qquad (7)$$

Dies ist das Volumen, welches pro Zeiteinheit durch das Rohr fließt.

Druckanzeige an den Manometern

Hier soll kurz beschrieben werden, wie aus der Wasserhöhe im Manometer der Druck in der Kapillare bestimmt werden kann.

Der Druck, der in der Strömung herrscht, kann auch Arbeit verrichten, so z.B. um Flüssigkeit in den Manometern anzuheben. Die angehobene Flüssigkeitsmenge baut jedoch einen Gegendruck auf. Ist die Querschnittsfläche des Manometers A, so besitzt eine Flüssigkeitssäule der Höhe h die Gewichtskraft $F_g = \rho V g = \rho A h g$ und übt daher den Gegendruck

$$p = \frac{F}{A} = \rho g h \qquad (8)$$

aus. Die Flüssigkeitssäule kommt dann zum Stillstand, wenn der Druck der Flüssigkeit in der Kapillare dem Druck der Flüssigkeitssäule im Manometer entspricht. (8) kann daher benutzt werden, um den Druck an der jeweiligen Stelle der Kapillare zu bestimmen.

Versuchsdurchführung

Druckabfall in einer laminaren Strömung

Beschreibung

In diesem Versuch wird Kapillare A verwendet. Die Kapillare hat konstanten Durchmesser, es ist also mit einem linearen Druckabfall entlang der Kapillare zu rechnen. Zur Überprüfung dessen sind an der Kapillare drei Manometer befestigt, der Abstand beträgt jeweils 10cm (Abb. 5). Es wurden 3 Messungen durchgeführt.

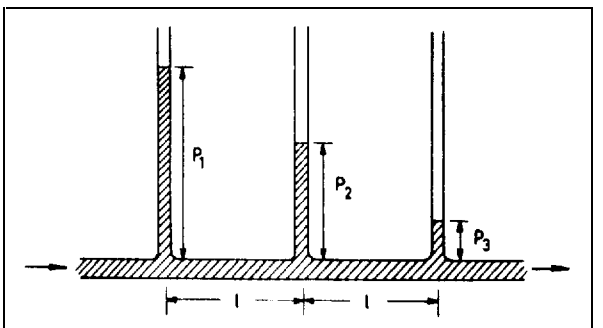

Abb. 5 - Kapillare A

Meßwerte

Messung	p_1 [cm]	$\Delta p_{12}\,[Pa]$	p_2 [cm]	$\Delta p_{23}\,[Pa]$	p_3 [cm]	$\frac{\Delta V}{\Delta t}\ \left[\frac{ml}{s}\right]$	$\frac{\varnothing \Delta p}{l}/\frac{\Delta V}{\Delta t}\left[10^6\ \frac{kgs}{m^5}\right]$
1	26,65	283,35	23,75	273,57	20,95	9,33	298,46
2	21,3	254,04	18,7	249,15	16,15	8,33	302,04
3	12,15	185,64	10,25	180,76	8,4	6,08	301,32

Man erkennt deutlich die Proportionalitäten zwischen dem Druck pro Strömungsstrecke und dem Druckabfall pro Durchflußmenge.

Fehlerrechnung

Die Höhe des Manometers konnte auf $\pm 1mm$ genau abgelesen, die Durchflußmenge auf $\pm 10ml$ genau und die Zeit auf $\pm 1s$ genau gemessen werden. Die sich ergebende Proportionalitätskonstante sei c genannt.

Messung	σ_{p_1} [%]	σ_{p_3} [%]	$\sigma_{\frac{\Delta V}{\Delta t}}$ [%]	$\sigma_{\Delta p}$ [%]	σ_c [%]
1	0,4%	0,5%	2,4%	0,7%	2,5%
2	0,5%	0,65%	2,6%	0,85%	2,8%
3	0,85%	1,2%	3,2%	1,5%	3,6%

Damit liegen die Abweichungen der Proportionalitätskonstante deutlich innerhalb des Rahmens.

Überprüfung der Bernoulli'schen Gleichung

Beschreibung

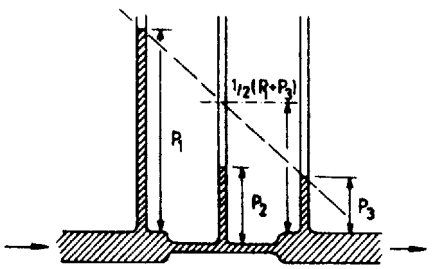

Abb. 6 - Kapillare B

Hier wird Kapillare B verwendet. Sie besitzt zwischen zwei Manometern eine Verjüngung, auf der in ihrer Mitte wiederum ein Manometer aufgesetzt ist (Abb. 6). Wie bei der Kapillare A befinden sich die Manometer damit im Abstand von 10cm. Bei einer idealen Strömung würden die äußeren Manometer, an denen der Kapillarquerschnitt gleich ist, gleiche Drücke anzeigen. In der Verjüngung der Kapillare würde ein nach (2) geänderter Druck erscheinen. Da es sich jedoch nicht um eine ideale Strömung handelt, fällt der Druck entlang der Kapillare ab. Die Bernoulli'sche Gleichung wird nun dahingehend korrigiert, daß der an den äußeren Manometern gemessene Druck gemittelt und mit dem in der Mitte tatsächlich gemessenen verglichen wird. Aus der Beziehung

$$\Delta p = \tfrac{1}{2}\left(p_1 + p_3\right) - p_2 = \rho v_2^2 \qquad (9)$$

kann die Strömungsgeschwindigkeit in der verjüngten Kapillare gemessen werden. Da auch wieder die Durchflußmenge gemessen wurde, läßt sich daraus der Querschnitt der Kapillare berechnen.

Meßwerte

Messung	p_1 [cm]	p_2 [cm]	p_3 [cm]	$\Delta p\,[Pa]$	$\frac{\Delta V}{\Delta t}\ \left[\frac{ml}{s}\right]$	$\Delta p/\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)^2$	α_i/α
1	28,3	20,9	20,95	363,96	8,50	5,038	0,971
2	25	18,15	18,45	349,30	8,33	5,034	0,970
3	21,6	15,7	16,0	302,89	7,83	4,940	0,952
4	19,05	14,0	14,25	258,93	7,33	4,819	0,929
5	15,4	11,3	11,35	202,74	6,00	5,632	1,086
6	9,9	7,15	7,05	129,46	4,83	5,549	1,070
7	5,05	3,6	3,55	68,40	3,50	5,584	1,076

Diskussion der Meßergebnisse

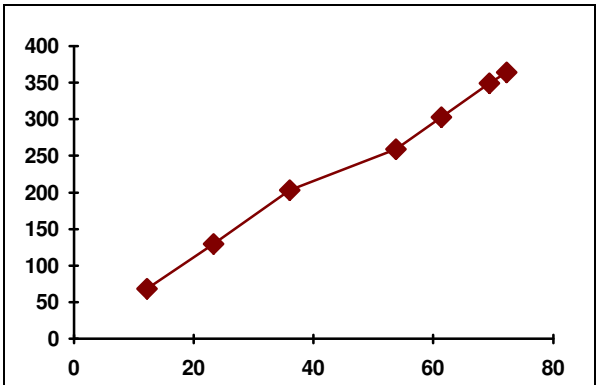

Abb. 7 - Messungen an der Kapillare B

Wie aus der Formel bereits ersichtlich, erkennt man hier die Proportionalität zwischen der Druckdifferenz nach Bernoulli und dem Quadrat der Strömungsmenge, die proportional zur Flußgeschwindigkeit ist. Allerdings machen sich schon recht große Abweichungen bemerkbar. In Abb. 7 ist die Druckdifferenz dem Quadrat der Strömungsmenge gegenüber aufgetragen. Eine Gerade läßt sich nur mit recht viel Mühe erkennen. Insbesondere die Werte niedriger Durchflußmenge scheinen Probleme zu bereiten. Das ist jedoch verständlich, da hier laut Fehlerrechnung die größten versuchsbedingten Fehler einfließen.

Zur Verbesserung der Messung wird eine lineare Regression angewendet, um eine mittlere Gerade zu bestimmen. Diese wird jedoch leicht korrigiert. Es ist sinnvoll anzunehmen, daß die Druckdifferenz Null wird, wenn kein Fluß herrscht. Die Gerade soll also durch den Ursprung gehen. Hierfür gilt dann

$$\alpha = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = 5{,}188\frac{Pa}{\left(\frac{ml}{s}\right)^2} = 5{,}2\cdot 10^6\,\frac{\frac{N}{m^2}\cdot s^2}{l^2} = 5{,}2\cdot 10^{12}\,\frac{\frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot s^2}{m^2\cdot m^6} = 5{,}2\cdot 10^{12}\,\frac{kg}{m^7}\ . \qquad (10)$$

Der Wert alleine sagt jedoch nicht so viel. Erst wenn man die kompletten Beziehungen aufschreibt, wird er etwas aussagekräftiger. Er ist der gemittelte Proportionalitätsfaktor zwischen der Druckdifferenz und dem Quadrat der Durchflußmenge. Mit den Formeln (1) und (9) folgt für die Steigung der Ausgleichsgeraden

$$\alpha = \frac{\Delta p}{\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)^2} = \frac{\rho v^2}{S^2 v^2} = \frac{\rho}{S^2} \quad \Rightarrow \quad S = \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}}\ . \qquad (11)$$

Aus dem Wert für α läßt sich also direkt der Querschnitt des Rohres berechnen. Hier ist der Wert für die Querschnittsfläche: $S = 13{,}86\cdot 10^{-6}\,m^2$, weshalb für den Radius der Kapillare gilt: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2{,}1\cdot 10^{-3}\,m$.

Fehlerrechnung

Auch bei dieser Messung gehe ich wieder davon aus, daß die Manometerhöhe auf $\pm 1mm$ bestimmbar war, daß die Zeit auf $\pm 1s$ genau gestoppt werden konnte und die Füllhöhe im Meßbecher auf $\pm 10ml$ abgelesen werden konnte.

Messung	σ_{p_1} [%]	σ_{p_2} [%]	σ_{p_3} [%]	$\sigma_{\frac{\Delta V}{\Delta t}}$ [%]	$\sigma_{\Delta p}$ [%]	σ_{α} [%]
1	0,4%	0,5%	0,5%	2,0%	0,6%	4,0%
2	0,4%	0,6%	0,6%	2,0%	0,7%	4,0%
3	0,5%	0,7%	0,7%	2,2%	0,9%	4,5%
4	0,6%	0,8%	0,8%	2,3%	1,0%	4,7%
5	0,7%	0,9%	0,9%	2,8%	1,1%	5,7%
6	1,1%	1,4%	1,4%	3,5%	1,7%	7,2%
7	2,0%	2,8%	2,8%	4,8%	3,3%	10,2%

Man erkennt, daß die gemessenen Werte durchaus innerhalb der Toleranz liegen (vergleiche die Quotienten in der Tabelle mit den Meßwerten). Aus den Einzelfehlern für die Steigung läßt sich auch die Standardabweichung der Steigung bestimmen. Sie beträgt $\sigma_{\alpha} = 6,6\%$. Da diese Abweichung die einzige Einflußgröße beim Fehler des Durchmessers ist, beträgt dieser ebenfalls $\sigma_S = 6,6\%$.

Nachweis des Hagen - Poiseuille Gesetzes

Beschreibung

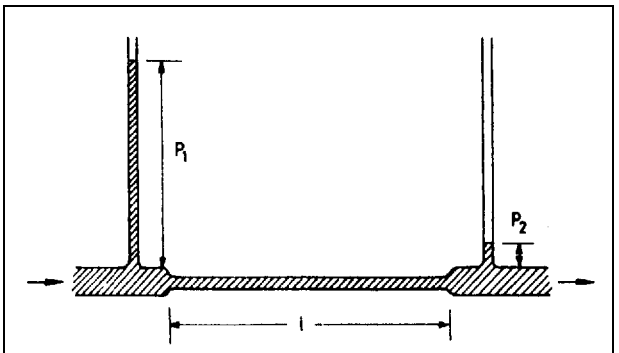

Abb. 8 - Kapillaren C, D und E

In diesem Versuch werden die letzten 3 Kapillaren benutzt. Sie besitzen eine jeweils 10cm lange Verjüngung, an deren Enden je ein Manometer angebracht ist (Abb. 8). Bei einer Strömung durch die Kapillare entsteht, da es sich nicht um eine ideale Strömung handelt, ein Druckabfall nach Hagen-Poiseuille. Dieser Abfall ist zum einen von der Durchflußgeschwindigkeit und zum anderen von dem Radius der Kapillare ab. Hier werden der Druckabfall und die Durchflußgeschwindigkeit respektive der Durchflußmenge pro Zeit gemessen, woraus dann der Radius der Kapillare bestimmt werden kann. Aus (7) folgt

$$R = \sqrt[4]{\frac{8\Delta V \eta l}{\pi \Delta t \Delta p}} \quad . \tag{12}$$

Meßwerte

Kapillare	$\Delta p\,[Pa]$	$\frac{\Delta V}{\Delta t}\ \left[\frac{ml}{s}\right]$	$R\,[mm]$
C	1749	4,00	1,48
D	1343	8,67	1,91
E	1832	7,33	1,70

Fehlerrechnung

Als Meßgenauigkeit verwende ich sinnvollerweise wieder die bereits benutzten Ungenauigkeiten.

Kapillare	$\sigma_{\Delta p}\,[\%]$	$\sigma_{\frac{\Delta V}{\Delta t}}\ [\%]$	$\sigma_R\,[mm]$
C	1,3%	4,2%	4,4%
D	0,8%	2,0%	2,2%
E	1,4%	2,3%	2,7%

Auch hier herrscht bei den Kapillardurchmessern eine gewisse Unsicherheit.

Zum guten Schluß

Konstanten

Folgende Konstanten wurden bei der Berechnung benutzt:

Raumtemperatur ..... $T = 28,6° C$

Viskosität von Wasser..... $\eta = 8,164 \cdot 10^{-3}$ Poise

Dichte von Wasser ..... $\rho = 996 \frac{kg}{m^3}$

Erdbeschleunigung ..... $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Ein Dank

Ein Dank geht an Andreas F. für die Bereitstellung der Abbildungen 2, 3, 4, 5, 6 und 8 als gescannte Grafiken sowie der Abbildung 1 als gezeichnetes Bild.