Versuchsprotokoll *Martin Opitz, Frank Pilhofer*

Dienstag, 04. Mai 1993 Physikalisches Anfängerpraktikum

Oberflächenspannung

Versuch 7/2

Problemstellung des Versuchs

Der durchgeführte Versuch dient der Bestimmung der Oberflächenspannung von destilliertem Wasser. Diese wird mit Hilfe der Steighöhenmeßmethode in Kapillaren gemessen.

Beschreibung der Meßmethode

Eine Glasrohrstange wird mittels eines Glasschneiders erst in etwa 40cm lange Stangen zerschnitten und über einem Bunsenbrenner erhitzt. Nach kurzer Zeit wird das Glas zähflüssig und formbar. Zu diesem Zeitpunkt werden die Stangen aus dem Feuer genommen und auseinandergezogen. Durch diese Prozedur wird der Querschnitt des Rohres stark verkleinert. Verschiedene Stangen werden auf verschiedene Längen gezogen, um Rohre mehrerer Durchmesser zu erhalten. Aus der Mitte der Stangen, wo das Rohr einen möglichst homogenen Querschnitt besitzt, werden die Kapillaren ausgeschnitten.

Die fertigen Kapillaren werden nun in ein Stativ eingespannt. Dieses ist mit einer Spiegelskala versehen, an der später die Steighöhe des Wassers abgelesen wird. Zu diesem Zweck wird die Kapillare am unteren Rand auf die Höhe des Skalennullpunktes festgestellt.

An die untere Seite des Röhrchens wird nun ein Schälchen mit destilliertem Wasser angenähert. Dieses wird solange nach oben verschoben, bis die untere Spitze des Röhrchens gerade die Wasseroberfläche berührt. Nun mißt man an der Spiegelskala, wie weit das Wasser emporsteigt. An der Endstelle der Wassersäule wird eine Markierung angebracht, an der nun das Rohr durchgeschnitten wird. An dieser Stelle des Rohrs wird der Innendurchmesser bestimmt.

Um den Innendurchmesser einer Kapillare zu bestimmen, wird ein Mikroskop mit integrierter Längenskala verwendet. Bevor die eigentliche Messung jedoch beginnen kann, muß die Skala zunächst mittels einer Eichskala geeicht werden.

Beschreibung der physikalischen Grundlagen

Die Oberflächenspannung beruht auf der Wirkung der Molekularkräfte (van der Waals'schen Kräfte, hier mit $\vec{R}$ bezeichnet) in der Flüssigkeit, die zwischen den einzelnen Molekülen wirkt (Fig. 1). Die Molekularkraft beruht auf dem Dipolcharakter des Wassers, aufgrund der Polarisation ziehen sich Wassermoleküle gegenseitig an.

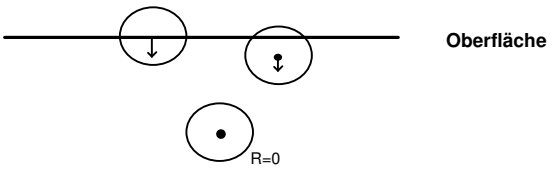


Fig. 1 - Molekularkräfte auf Teilchen an der Oberfläche

Je nachdem in welcher Position sich ein Molekül in einer Flüssigkeit befindet, wirken verschiedene Molekularkräfte auf das Teilchen. Befindet sich ein Molekül mit seiner Wirkungssphäre innerhalb der Flüssigkeit, wirken von allen Seiten die gleichen Kräfte, wodurch sich das Molekül im Gleichgewicht befindet. Ragt nun ein Teil der Wirkungssphäre aus der Flüssigkeit heraus, so ist die Entfernung von der Oberfläche kleiner als der Radius seiner Wirkungssphäre. Für die durch die Flüssigkeitsoberfläche abgeschnittene Kugelkalotte fehlen die anziehenden Kräfte benachbarter Flüssigkeitsteilchen. Dadurch erfährt dieses Teilchen eine resultierende Kraft ins Innere der Flüssigkeit, da dort immer noch die Kohäsionskraft angreift. Die Größe der resultierenden Kraft hängt auch noch von der Kraft ab, die von den anderen Substanzen an der Grenzfläche wirken.

Diese Anschauung zeigt, daß ein Teilchen nur unter Energieaufwand an die Oberfläche bewegt werden kann, ein Teilchen an der Oberfläche besitzt demnach potentielle Energie. Je mehr Teilchen an der Oberfläche sind, desto größer wird die Oberfläche der Flüssigkeit, ebenso wird die Summe der potentiellen Energien der Teilchen an der Oberfläche erhöht. Da das stabile Gleichgewicht einem Minimum an potentieller Energie entspricht, wird die Oberfläche einer Flüssigkeit das Bestreben haben, eine möglichst kleine Oberfläche anzunehmen.

In unseren Versuch interessiert nun die Grenzflächenspannung zwischen dem flüssigen Wasser und dem festen Glas. An der Glaswand erfahren die Wassermoleküle sowohl anziehende Kräfte von den Glasmolekülen als auch von den im Wasser befindlichen Molekülen. Glas besteht zum überwiegenden Teil aus Siliziumoxid, einem Molekül, welches ebenfalls Dipolcharakter besitzt und daher van der Waals'sche Kräfte auf das Wasser ausübt. Die Wasserstoffatome des Wassers werden von den Sauerstoffatomen des Glases angezogen und haften an der Glasoberfläche. Dies bedeutet, daß das Wasser bemüht sein wird, die Grenzfläche zum Glas zu vergrößern.

Das Wasser steigt somit an der Grenzfläche zum Glas empor. Dies hat jedoch zur Folge, daß sich ein Meniskus bildet, die Oberfläche des Wassers gegenüber der Luft wird entscheidend vergrößert. Da das Wasser jedoch wie oben erläutert ebenfalls bemüht ist, ein möglichst niedriges Energieniveau anzunehmen und die Grenzfläche zur Luft zu verkleinern, entsteht eine nach oben gerichtete Kraft, die versucht, den entstandenen Meniskus zu begradigen.

Dadurch steigt der Wasserspiegel solange, bis das Gewicht der Flüssigkeitsmoleküle dieser Kraft das Gleichgewicht hält. Das Steigen kommt dadurch zustande, daß die nach außen gerichteten Adhäsionskräfte gegenüber den nach innen gerichteten Kohäsionskräften überwiegen. In der Kapillare, die bei dem Versuch verwendet wird, ist die Oberfläche und damit die Anziehungskraft des Glases groß im Vergleich zum Gewicht der hängenden Flüssigkeit, wodurch die Wassersäule bei dünnen Kapillaren besonders hoch steigt. Bei destilliertem Wasser besteht die Grenzfläche aus einem konkaven Meniskus.

Bei einer sphärisch gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche herrscht eine nach dem Krümmungsmittelpunkt hin gerichtete Kraft, die an der Oberfläche den Druck ergibt:

$p = \frac{2\sigma}{r'}$, r' ist der Krümmungsradius, σ ist die Oberflächenspannung des Wassers gegenüber der Luft. Der Druck ist nach oben gerichtet.

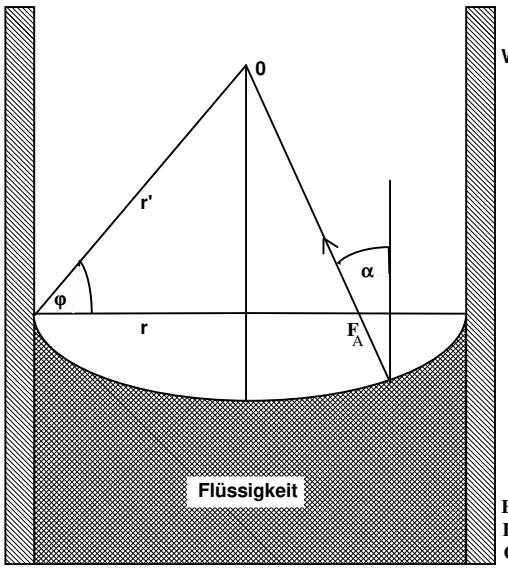


Fig. 2
Die Kraft auf die Grenzfläche

Wegen $r' = \frac{r}{\cos\varphi}$ gilt $p = \frac{2\sigma}{r}\cos\varphi$. Dieser Druck wirkt auf jedes Flächenelement df. Die Kraft auf das Flächenelement df ist also pdf. Ihre vertikale Komponente ist $pdf\cos\alpha$. Ferner ist $df\cos\alpha$ die Projektion von df auf die Horizontalebene, d.h. die Projektion von df auf den senkrechten Rohrquerschnitt. Die Summe aller Vertikalkomponenten der Kraft beträgt also $F = \sum \frac{2\sigma}{r}\cos\varphi df\cos\alpha = \frac{2\sigma}{r}\cos\varphi\sum df\cos\alpha$. Im zweiten Teil der Gleichung wurden die Konstanten aus der Summe herausgezogen. In der Formel ist $\sum df\cos\alpha = \pi r^2$ gleich dem Gesamtquerschnitt des Rohres. Daher folgt für die Gesamtkraft, die auf das Wasser wirkt: $F_A = \frac{2\sigma}{r}\cos\varphi\pi r^2 = 2\sigma r\pi\cos\varphi$. Diese Kraft hebt die Flüssigkeit soweit in die Höhe, bis ihr das Gewicht der gehobenen Flüssigkeitsmenge das Gleichgewicht hält. Ist h die Steighöhe und θ die Dichte der Flüssigkeit, so ist die Gewichtskraft des gehobenen Wassers $F_g = \pi hg\theta r^2$. Diese beiden Kräfte sind im Gleichgewichtszustand gleich, so daß die Beziehung gilt: $2\sigma r\pi\cos\varphi = r^2\pi h\theta g \Rightarrow h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{r\theta g}$.

Da Wasser völlig benetzt ist $\varphi = 0$, woraus $\cos\varphi = 1$ und $h = \frac{2\sigma}{r\theta g}$ folgt. Mit der Beziehung für den in der Messung bestimmten Durchmesser der Kapillare $r = \frac{d}{2}$ kann eine endgültige Formel für die Oberflächenspannung bestimmt werden.

$$\sigma = \frac{hd\theta g}{4}$$

Durchführung der Messung

Zunächst mußte zur Bestimmung des Durchmessers der Kapillaren die in das Mikroskop eingebaute Skala geeicht werden. Die Skala war in 10 Einheiten unterteilt, anhand einer weiteren Unterteilung konnten $\frac{1}{10}$ Einheiten abgelesen werden. Zum Eichen wurde das Mikroskop auf eine geeichte Skala fokussiert. Beide Skalen wurden überlagert und es wurde abgelesen:

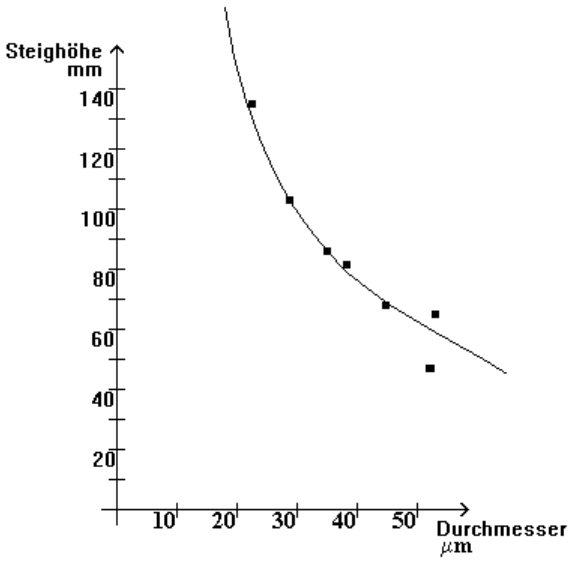
interne Skala	geeichte Skala
0 Einheiten	5,9 $\frac{1}{10}$ mm
10 Einheiten	9,1 $\frac{1}{10}$ mm

Daraus läßt sich der Abstand zweier Skalenteile der internen Skala berechnen, er beträgt $\frac{9{,}1-5{,}9}{10} \cdot \frac{mm}{10} = 32\mu m$.

Insgesamt wurden für den Versuch 7 Kapillaren hergestellt. Gemessen wurde die Steighöhe des Wassers und der Durchmesser der Kapillare. In der folgenden Tabelle sind nur die Mittelwerte der Durchmesser eingetragen. In der ersten Spalte befindet sich die Nummer des Versuches, in der 2. die gemessene Steighöhe und in der dritten der Innendurchmesser. Aus den gegebenen Werten wurde der Wert für die Oberflächenspannung berechnet und in die 4. Spalte eingetragen.

Versuch Nr.	Steighöhe $[mm]$	Durchmesser $[\mu m]$	Wert für σ $\left[\frac{g}{s^2}\right]$	Fehler $\frac{\sigma_f}{f}$ $[\%]$
1	135	22,4	7,416	14,3
2	103	28,8	7,275	11,1
3	81,5	38,4	7,675	8,5
4	69	44,8	7,581	7,3
5	87	35,2	7,511	9,2
6	66	53,2	8,611	6,2
7	47	52,1	6,005	6,5

Zur Übersicht trage ich die Werte für die Steighöhe und den Durchmesser auch noch einmal graphisch auf.



Bereits an der Grafik kann man die berechneten Zusammenhänge erkennen. Aus der Grafik folgt $h \cdot d = const$, wobei die Konstante aus der Oberflächenspannung, der Erdbeschleunigung und der Dichte besteht.

Bei der Betrachtung der Werte fallen vor allem die letzten beiden Werte auf. Der eine weicht sehr stark nach oben ab, der andere sehr stark nach unten. Aufgrund der starken Abweichungen werde ich sie nicht zur Bestimmung des

Mittelwertes heranziehen. Hierbei handelt es sich vielleicht um gröbere Ablesefehler, andererseits können auch Verunreinigungen die Fehler verursacht haben. Bestimme ich den Mittelwert aus den anderen Werten, erhalte ich für die Oberflächenspannung des Wassers $\overline{\sigma} = 7,49 \frac{kg}{s^2}$.

Fehlerabschätzung

Auch bei der folgenden Fehlerabschätzung werde ich die letzten beiden Werte, die völlig aus der Reihe fallen, nicht berücksichtigen. Fasse ich die Werte für die Oberflächenspannung als Einzelmessungen auf, ist die Standardabweichung der Einzelmessung $\sigma = 0,15$, die Standardabweichung des Mittelwertes liegt bei $m = 69 \cdot 10^{-3}$. Für die Oberflächenspannung inklusive Fehler schreibe ich daher $\sigma = 7,5 \frac{kg}{s^2} \pm 1\%$.

Weiterhin kann natürlich noch der Fehler berechnet werden, der aufgrund der Meßmethoden entsteht. Dank der Spiegelskala im Stativ, dessen Ableseskala in Millimeter unterteilt war, ließ sich die Steighöhe auf $\pm 1mm$ bestimmen. Bei der Bestimmung des Innendurchmessers konnte auf $\pm 0,1E \mathrel{\hat{=}} 3,2\mu m$ abgelesen werden. Aus dem Fehlerfortpflanzungssatz ergibt sich für den Gesamtfehler $\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$ (Spezialfall II). Die Werte für den Fehler sind bereits in die Tabelle eingetragen. Man bemerkt, daß der Fehler fast völlig von dem Fehler im Durchmesser bestimmt wird. Der auf diese Weise errechnete Fehler ist deutlich größer als derjenige, der sich vorher ergeben hat. Beachtet man den Idealwert aus der Literatur, $\sigma \approx 7,29$, so liegt diese Messung mit einer Abweichung von 2% noch deutlich innerhalb der Toleranz von > 6%.

Überlegung

Man kann sich überlegen, daß die nach oben gerichtete Kapillarkraft nicht von unregelmäßigen Kapillardurchmessern beeinflußt wird. Die Kapillarkraft entsteht nur an der Grenzfläche des Wassers zur Luft und ist nur dort vom Kapillardurchmesser abhängig.

Anders sieht das jedoch bei der nach unten gerichteten Gewichtskraft aus. Die Gewichtskraft wird von allen Wasserteilchen ausgeübt, die sich in der Kapillare befinden. Die Gewichtskraft beträgt $F_g = mg$, wobei sich die Masse aus $m = \theta V$ errechnet. Für die Berechnung des Volumens sind wir von konstantem Durchmesser ausgegangen, $V = \pi h r^2$. Im Normalfall müßte das Volumen durch Integration bestimmt werden: $V = \pi \int_0^H r^2(h) dh$. Auch der Unterschied beider Formeln kann eine Verfälschung der Meßergebnisse bewirken. Dies ist ein Indiz dafür, was bei den letzten beiden Messungen falsch gelaufen ist. Hierbei handelte es sich um Kapillaren mit deutlich größerem Durchmesser als in den anderen Messungen; Unregelmäßigkeiten sind hier wahrscheinlich.