Versuchsprotokoll

Martin Opitz, Frank Pilhofer

Dienstag, 18. Mai 1993

Physikalisches Anfängerpraktikum

Trägheitsmoment

Versuch 6/2

Inhaltsverzeichnis

Problemstellung des Versuchs 2

Beschreibung des Versuchsaufbaus 2

Physikalische Grundlagen 2

- Einführung des Trägheitsmomentes 2
- Trägheitsmomente einfacher Körper 3
- Der Steinersche Satz 4
- Die harmonische Schwingung 4

Messungen 5

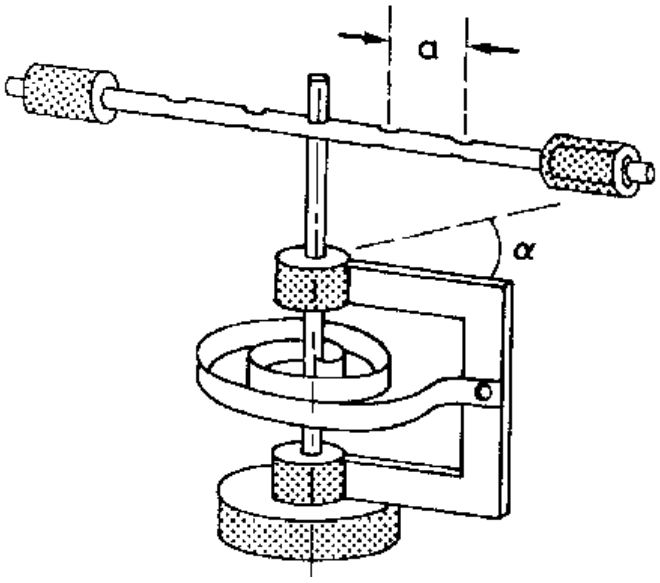
- Die Hantel 5
- Fehlerabschätzung 7
- Der Quader 7
- Das Dreieck 9

Meßwerte auf einen Blick 10

Problemstellung des Versuchs

Bei diesem Versuch sollen Trägheitsmomente verschiedener Körper bestimmt werden. Als Basis werden die Trägheitsmomente einfacher Körper berechnet. Die spätere Bestimmung anderer Trägheitsmomente erfolgt über Messungen, die auf den berechneten Grundlagen aufbauen.

Beschreibung des Versuchsaufbaus



Ein drehbar gelagertes System kann mittels einer Spiralfeder nahezu ideale harmonische Schwingungen ausführen. Werden verschiedene Körper so befestigt, daß sie sich mitdrehen, verändert sich das Trägheitsmoment des Systems. Mit dem Trägheitsmoment ändert sich auch die Schwingungsperiode, die mittels einer Stoppuhr gemessen werden kann. Mit Hilfe der Formeln, die im nächsten Kapitel hergeleitet werden, kann das Trägheitsmoment eines Körpers direkt aus der Dauer einer Schwingung berechnet werden. Es wird auch untersucht werden, wie sich das Trägheitsmoment bei Änderung der Drehachse in Bezug auf den Körper ändert.

Physikalische Grundlagen

Einführung des Trägheitsmomentes

Betrachtet man einen in Bewegung befindlichen Körper, so besitzt der Körper eine gewisse kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$. Auch ein Körper, der eine Rotationsbewegung um eine Achse ausführt, ist in Bewegung; es ist sinnvoll, auch dieser Bewegung eine kinetische Energie zuzuordnen. Die gegebene Formel trifft hier jedoch auf Schwierigkeiten. Trotz der Bewegung des Körpers ist die Geschwindigkeit nicht wie oben meßbar. Der Körper kehrt zu bestimmten Zeitpunkten stets an den gleichen Ort zurück, was zu einer Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0$ führt, entsprechend müßte die kinetische Energie auch 0 sein.

Diese Überlegung führt also ins Leere. Um zu einer sinnvollen Definition zu gelangen, muß der Körper zunächst in infinitesimal kleine Teilkörper aufgeteilt werden. Von jedem dieser Teile kann dann eine Energie bestimmt und aufsummiert werden: $E_{kin} = \frac{1}{2}\int v^2 dm$. Die Geschwindigkeit muß für jedes Teilstück individuell bestimmt werden. Bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ω, mit der sich der Körper um die Rotationsachse dreht, beträgt die Geschwindigkeit eines Körpers im Abstand r von der Drehachse $v = \omega r$. Das obige Integral wird damit zu $E_{kin} = \frac{1}{2}\int (\omega r)^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm$. Zur Abkürzung schreibt man

$$I = \int r^2 dm \qquad (1)$$

und bezeichnet diese Größe als das *Trägheitsmoment* eines Körpers. Die Energie wird zu $E_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$. Aufgrund ähnlicher Überlegungen muß auch der Impuls $p = mv$ der linearen Bewegung durch eine entsprechende Rotationsgröße, den Drehimpuls $L = I\omega$ ersetzt werden.

Man erkennt, daß das Trägheitsmoment eine Analogie zu der trägen Masse darstellt. Je größer das Trägheitsmoment eines Körpers, desto mehr Kraft muß aufgewendet werden, um den Drehimpuls zu ändern. Die Kraft, die auf einen Körper wirkt, ist die zeitliche Ableitung des Impulses, in diesem Fall also

$$F = \dot{L} = I\dot{\omega} = I\ddot{\phi} \ . \qquad (2)$$

Sie ist direkt proportional zum Trägheitsmoment und heißt *Drehmoment*.

Trägheitsmomente einfacher Körper

Aus (1) lassen sich leicht Trägheitsmomente verschiedener Art berechnen, was hier am Beispiel einer Stange, die um eine zum Stab senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Achse rotiert, vorgeführt werden soll. Hierfür wird zunächst das Trägheitsmoment einer Hälfte der Stange berechnet. Deshalb wird auch nur bis zur Hälfte der Masse integriert: $\frac{1}{2} I = \int_0^{M/2} r^2 dm$.

Bei einer Zerlegung der Stange in kleine Scheibchen, die nahezu gleichen Abstand von der Drehachse haben, besitzt eine Scheibe die Masse $\Delta m = \frac{M}{l}\Delta r$, wobei l die Länge der Stange ist. Daraus folgt $\Delta r = \frac{l}{M}\Delta m$, was in das Integral eingesetzt werden kann: $\frac{1}{2} I = \int_0^{M/2} \left(\frac{ml}{M}\right)^2 dm = \frac{l^2}{M^2} \int_0^{M/2} m^2 dm$. Das Integral kann leicht berechnet werden, insgesamt folgt

$$I = \frac{1}{12} Ml^2 \ . \qquad (3)$$

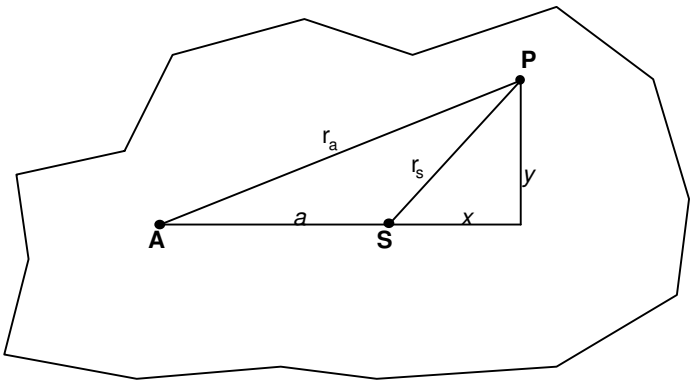
Allerdings enthält die Berechnung wie schon angedeutet noch einen kleinen Fehler. Bei der Herleitung der Formel wurde angenommen, die einzelnen Scheibchen hätten gleichen Abstand von der Drehachse. Die Endformel gilt daher nur für vernachlässigbare Stangendurchmesser. Eliminiert man den Fehler, erhält man

$$I = \tfrac{1}{12} M\left(3r^2 + l^2\right) , \qquad (4)$$

wobei *r* der Radius des zylindrischen Stabes ist.

Als Anwendung der beiden Formeln soll hier das Trägheitsmoment I_0 der horizontalen Stange und I_s eines der zylindrischen Gewichte bestimmt werden. Hierbei soll das Trägheitsmoment der Drehachse vernachlässigt werden. Dies ist aufgrund des kleinen Radius und der vergleichsweise kleinen Masse der Achse möglich. Die Massenelemente befinden sich praktisch auf der Drehachse des Systems. Der Fehler, der auf diese Weise entsteht, ist kleiner als andere Fehler, die bei der Messung auftreten (z.B. bei der Zeitmessung der Schwingungsdauer). Beim Einsetzen der Werte in die Formeln erhält man $I_0 = 3,47 \cdot 10^{-3} kgm^2$ und $I_s = 38,25 \cdot 10^{-6} kgm^2$.

Der Steinersche Satz



Im letzten Abschnitt wurden Trägheitsmomente von Körpern berechnet, deren Schwerpunkt genau auf der Drehachse liegt. In diesem Kapitel wird die Änderung des Trägheitsmomentes betrachtet, wenn man den Schwerpunkt aus der Drehachse heraus verlagert. Hierzu betrachte man die nebenstehende Skizze. *S* sei der Schwerpunkt des Körpers, *A* die Drehachse. Dann ist *a* die Verschiebung des Schwerpunktes. Wir betrachten ein infinitesimal kleines Massenelement *P*. Der Abstand von *P* zu *A* berechnet sich aus $r_a^2 = (a+x)^2 + y^2 = a^2 + 2ax + x^2 + \left(r_s^2 - x^2\right) = a^2 + r_s^2 + 2ax$. Für das Trägheitsmoment folgt damit $I_{Neu} = \int r_s^2 dm + a^2 \int dm + 2a \int x dm$. Da *S* der Schwerpunkt des Körpers ist, führt eine Integration über *x* zu $\int x dm = 0$. Wegen $\int r_s^2 dm = I_{Alt}$ und $\int dm = M$ folgt daraus der Steinersche Satz:

$$I_{Neu} = I_{Alt} + ma^2 , \qquad (5)$$

wobei *a* die Verschiebung der Drehachse gegenüber dem Schwerpunkt darstellt.

Die harmonische Schwingung

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes werden die Körper auf einem drehbaren Tisch befestigt, der von einer Feder in Ruhelage gehalten wird. Dreht man den Tisch aus seiner Ruhelage heraus, ist die Feder bemüht, den Gleichgewichtszustand erneut herzustellen. Das System führt eine (nahezu ideale) *harmonische Schwingung* aus.

Ein Kriterium der harmonischen Schwingung ist es, daß die Rückstellkraft der Feder proportional zur Auslenkung des Systems aus ihrer Ruhelage ist. Der Quotient $\frac{F(t)}{\phi(t)} = -D$ ist daher konstant und wird als Richtmoment bezeichnet. Das negative Vorzeichen deutet auf die Vektoreigenschaften der Kraft und der Auslenkung hin, die Kraft wirkt in die entgegensetzte Richtung.

Nehmen wir an, das System führt ideale, ungedämpfte harmonische Schwingungen aus, zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Drehbewegung im Punkt maximaler Auslenkung. Dann gilt für den Drehwinkel $\phi(t) = A\cos(\omega t)$. ω ist dabei die Winkelgeschwindigkeit einer aufprojizierten Kreisbewegung, A ist die maximale Auslenkung, die Amplitude. Die zweite Ableitung nach der Zeit gibt die Winkelbeschleunigung an, sie beträgt

$$\ddot{\phi}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) \ . \tag{6}$$

Nach (2) läßt sich die Rückstellkraft der Feder bestimmen, $F(t) = -I\omega^2 A\cos(\omega t)$. Aus obigem Quotienten folgt dann $\frac{F(t)}{\phi(t)} = -D = -I\omega^2$. Die Winkelgeschwindigkeit läßt sich leicht auf die Schwingungsperiode des Systems zurückführen. Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ berechnet sich die Periode als

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \ . \tag{7}$$

Dabei ist das Trägheitsmoment des Systems eine additive Größe. Ist I_0, das Trägheitsmoment des Grundsystems bekannt, können die Trägheitsmomente I' hinzugefügter Körper über die Beziehung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I'}{D}} \tag{8}$$

bestimmt werden.

Messungen

Die Hantel

Auf dem Tisch wird eine Drehachse aufgebaut, durch die ein Stab geführt werden kann. Dieser Stab wird so justiert, daß die Drehachse senkrecht auf dem Stab steht und genau durch dessen Mittelpunkt geht. An der Stange wiederum können zu beiden Seiten in Abständen von jeweils 5cm zylindrische Gewichte angebracht werden können. Für diese Meßreihe werden zwei gleiche Gewichte jeweils in gleichem Abstand a von der Drehachse befestigt. Es gilt, das Trägheitsmoment zu bestimmen.

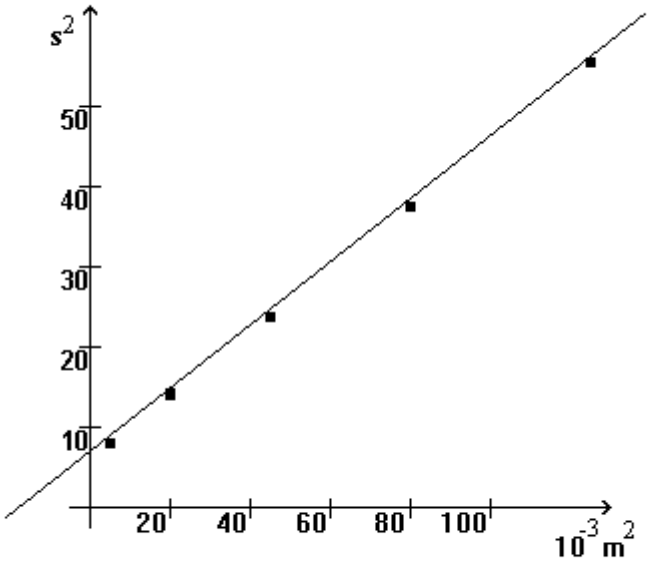
Bezeichnen wir mit I_0 das Trägheitsmoment des horizontalen Stabes und mit I_s das Trägheitsmoment eines der Gewichte, kann (8) benutzt werden. Eine kleine Umformung ist dennoch nötig, da sich in diesem Fall der Schwerpunkt der Zylinder nicht genau auf der Drehachse

befindet. Es muß der Steinersche Satz (5) angewandt werden. Mit $I^* = I_s + m_s a^2$ wird aus der Zeitformel (8) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0+2I^*}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0+2I_s+2m_s\left(a_1^2+a_2^2\right)}{D}}$. Durch Quadrierung und Umformung erhält man

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}\left(I_0 + 2I_s\right) + \frac{8\pi^2 m_s}{D}\left(a_1^2 + a_2^2\right) \qquad (9)$$

Man sieht, daß T^2 eine Funktion in Abhängigkeit von den Abständen ist; T^2 steht mit $\left(a_1^2 + a_2^2\right)$ in linearem Zusammenhang. Das wird zur Verfeinerung der Meßergebnisse verwendet, indem mehrere Werte gemessen werden und in einer linearen Regression gegeneinander aufgetragen werden. Hierfür setzen wir T^2 gleich *x* und $\left(a_1^2 + a_2^2\right)$ gleich *y*. Bei der Aufnahme der Meßwerte wurden, um Verfälschungen durch ungenaues Zeitmaß zu minimieren, jeweils 10 Schwingungen gemessen. Die einzelnen Meßwerte:

Abstand $a_1 = a_2$ [*cm*]	Zeit 10T [*s*]	Wert *x* für LR [$10^{-3} m^2$]	Wert *y* für LR [s^2]
5	27,9	5	7,78
10	37,1	20	13,76
15	48,6	45	23,62
20	61,2	80	37,45
25	74,4	125	55,35



In der Grafik nebenan erkennt man den erwarteten linearen Zusammenhang. Führt man mit dem Meßwerten eine lineare Regression durch, ergibt sich für die Parameter der Ausgleichsgeraden $\alpha = 396{,}15\frac{s^2}{m^2}$ und $\beta = 5{,}807 s^2$. Aus der Geradengleichung (9) entnimmt man die Bedeutung der Parameter, $\alpha = \frac{4\pi^2}{D} m_s$ und $\beta = \frac{4\pi^2}{D}\left(I_0 + 2I_s\right)$. Aus dem ersten Zusammenhang läßt sich das Richtmoment der Feder eindeutig bestimmen, mit diesem Wert erhält man weiterhin auch den eigentlich gesuchten Wert für das Trägheitsmoment. Es ergibt sich: $D = 24{,}336 \cdot 10^{-3}\frac{kgm^2}{s^2}$ und $I_0 + 2I_s = 3{,}58 \cdot 10^{-3} kg\, m^2$. Es ist jedoch anzumerken, daß dieser Wert *nicht* das Trägheitsmoment des Systems angibt, da wir obige Formel (9) aufgrund des Steinerschen Satzes umgeformt haben. Die Größe ist zwar ein Trägheitsmoment, jedoch unter der Annahme, daß sich der Schwerpunkt beider Zylindergewichte auf der Drehachse befinden.

Das gemessene Ergebnis kann nun mit den berechneten Werten verglichen werden. Aus den Formeln (3) und (4) folgt für das rechnerische Drehmoment $I_0 + 2I_s = 3{,}547 \cdot 10^{-3}\, kg\, m^2$ Damit beträgt die Abweichung gerade einmal 1%, ein für diesen Versuch sehr guter Wert.

Der Unterschied kann einerseits natürlich durch Meßfehler erklärt werden; andererseits bietet auch die Versuchsanordnung Gelegenheiten für Fehler. So haben wir uns bei der Herleitung der Formel für die Schwingungsdauer darauf verlassen, daß das System eine ideale harmonische Schwingung ausführt. Diese Bedingung ist hier sicher nicht erfüllt (wenn auch recht gut näherungsweise). So ist die Rückstellkraft der Feder nicht perfekt proportional zur Auslenkung, was je nach Amplitude eine leicht unterschiedliche Periode zur Folge hätte.

Ein ebenfalls wichtiger Grund für den Fehler ist jedoch die Vernachlässigung des Trägheitsmomentes der Drehachse. Wie man sieht, ist der gemessene Wert (incl. Drehachse) etwas größer als der berechnete Wert (excl. Drehachse). Hätte man das Trägheitsmoment der Achse noch addiert, wäre der Unterschied noch kleiner ausgefallen.

Fehlerabschätzung

Hier soll der Fehler abgeschätzt werden, der bei der Berechnung des Trägheitsmomentes der Hantel gemacht wurde. Hierfür ist zunächst die Fehlerabschätzung der linearen Regression interessant. Es ist $\sigma_\alpha = 0{,}39$ und $\sigma_\beta = 27 \cdot 10^{-3}$. Der Fehler setzt sich dann auch in D und $\left(I_0 + 2I_s\right)$ fort. In $D = \frac{4\pi^2}{\alpha} m_s$ fließen die Fehler von α und der Masse ein. Die Masse eines Gewichtes $m_s = 244{,}2\, g$ konnte mit einer Waage auf $\pm 1 g$ bestimmt werden, d.h. $\frac{\sigma_m}{m} = 4{,}1 \cdot 10^{-3}$. Aus dem Fehlerfortpflanzungssatz (Spezialfall II) erhalte ich $\frac{\sigma_D}{D} = \sqrt{\left(-\frac{\sigma_\alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2} = 0{,}4\%$. In $\left(I_0 + 2I_s\right)$ pflanzt sich dieser Fehler weiter fort, wiederum aufgrund Spezialfall II ergibt sich hier $\frac{\sigma_I}{I} = 0{,}7\%$. Diese Werte sind allerdings noch leicht geschmeichelt und etwas irreführend, da in sie nur der *reale* Fehler der Streuung der *y*- Werte einfließt, aber nicht der mögliche Fehler, der bei der Zeitmessung entsteht. Zusätzlich greifen auch noch die schon besprochenen Ungenauigkeiten in Hinblick auf die nicht ideale harmonische Schwingung. Etwas vorsichtiger erhalte ich dann $D = 24{,}3 \cdot 10^{-3}\, \frac{kg m^2}{s^2} \pm 0{,}5\%$ bzw. $I_0 + 2I_s = 3{,}58 \cdot 10^{-3}\, kg\, m^2 \pm 1\%$.

Der Quader

Ein gewichtiger Quader wird anstelle der Hantel so montiert, daß sein Schwerpunkt auf der Drehachse liegt. Dabei ist der Quader in sich drehbar gelagert, so daß er um seinen Schwerpunkt gedreht werden kann. Wechselt man in das System des Quaders, entspricht das der Drehung der Drehachse. Bei dieser Veränderung ändert sich auch das Trägheitsmoment eines Körpers. Dieses Moment wurde für verschiedene Winkeleinstellungen gemessen:

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	6,2	948	32,48

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
180	6,15	933	32,75

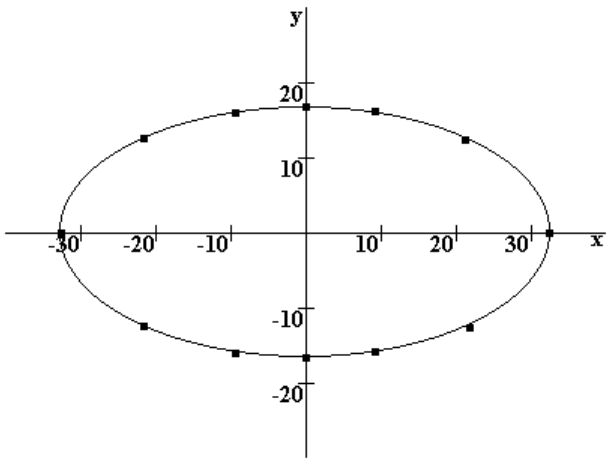
30	8,2	1660	24,56
60	10,85	2900	18,56
90	12,1	3610	16,64
120	10,9	2930	18,48
150	8,1	1620	24,86

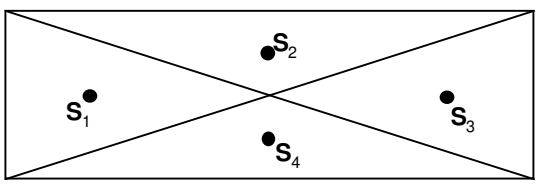
210	8,1	1620	24,86
240	10,9	2930	18,48
270	12,1	3610	16,64
300	10,95	2960	18,39
330	8,0	1580	25,17

Man erkennt leicht, daß die Werte sinusförmig pendeln. Es ist an dieser Stelle vielleicht sinnvoll anzumerken, wie die Größenverhältnisse des Quaders sind. In der Stellung $\beta = 0°$ hat er eine Breite von 7,2cm, eine Höhe von 15,3cm und (nicht ganz so wichtig) eine Tiefe von 1,95cm. Hochkant besitzt der Quader also ein kleineres Trägheitsmoment als Quer. Das läßt sich leicht nachvollziehen, da der durchschnittliche Abstand der Masseteilchen von der Drehachse beim Querstellen zunimmt.

Nun soll die Kurve von ρ dargestellt werden. Dabei kann natürlich β auf der *x*- Achse und ρ auf der *y*- Achse dargestellt werden, doch das wäre ziemlich langweilig. Einen viel besseren Überblick über die gemessenen Zusammenhänge erhält man bei der Darstellung von ρ in Polarkoordinaten, wobei ρ den Abstand der Punkte vom Nullpunkt angibt.

Diese Grafik ist rechts dargestellt. Man erkennt sehr schön die Ellipsenform der Meßreihe. Die Figur wird *Trägheitsellipsoid* genannt. Die Figur stimmt mit der in Anhang B berechneten überein. Eine graphische Interpretation des Ellipsoides erhält man auch, wenn man sich den Quader in vier symmetrische Teilstücke aufgeteilt denkt (siehe links unten) und den Schwerpunkt jedes dieser Teilstücke einzeichnet. Die vier Schwerpunkte liegen dann genau auf der berechneten Ellipse. Aus der Grafik bzw. den Meßwerten läßt sich die numerische Exzentrität der Ellipse bestimmen, aus $2x_0 = 33,28$ und $2y_0 = 65,23$ (kleine und große Hauptachse) erhält man $\varepsilon = 0,86$. Ein ähnlicher Wert ergibt sich, wenn man direkt die Größenverhältnisse des Quaders einsetzt, dort ergibt sich $\varepsilon' = 0,88$. Daß die Werte gleich sein müssen, läßt sich ebenfalls mit der Anschauung des viergeteilten Quaders begründen. Die Schwerpunkte werden hier jeweils von einem gleichschenkligen Dreieck bestimmt. Der Schwerpunkt in einem gleichschenkligen Dreieck aber teilt die Höhe im Verhältnis 2:1. Da Größenfaktoren bei der Exzentrität jedoch nicht relevant sind





(weshalb auch der Proportionalitätsfaktor E nicht bekannt zu sein braucht), ergibt sich der gleiche Wert.

Auch hier läßt sich die Abweichung von 3% leicht über Meßfehler begründen. Außerdem wurde bei den Berechnungen die Gabel, mittels derer der Quader gehalten wurde, vernachlässigt. Mit anderen Worten: es waren genug Fehlerquellen vorhanden.

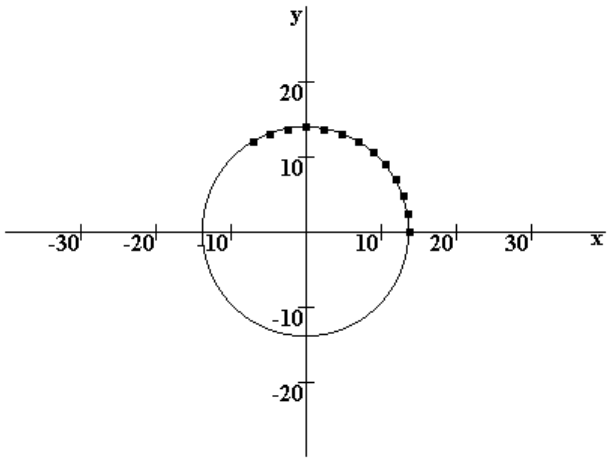
Das Dreieck

Anstelle des Quaders wird nun ein dreieckiger Körper in die Halterung eingespannt. Wie vorher soll das Trägheitsmoment des Dreiecks bei verschiedenen Drehwinkeln gemessen werden. Die Meßwerte:

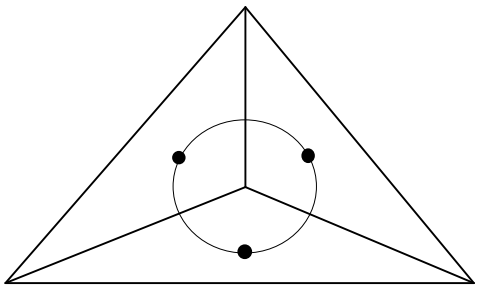
β [°]	$5T(\beta)$ [s]	$I(\beta)$ [$10^{-3} kgm^2$]	$\rho(\beta)$ [$\frac{E}{\sqrt{kgm}}$]
0	14,5	5,18	13,89
10	14,5	5,18	13,89
20	14,5	5,18	13,89
30	14,5	5,18	13,89
40	14,5	5,18	13,89
50	14,5	5,18	13,89

β [°]	$5T(\beta)$ [s]	$I(\beta)$ [$10^{-3} kgm^2$]	$\rho(\beta)$ [$\frac{E}{\sqrt{kgm}}$]
60	14,5	5,18	13,89
70	14,5	5,18	13,89
80	14,5	5,18	13,89
90	14,45	5,15	13,94
100	14,5	5,18	13,89
110	14,45	5,15	13,94

Dreht man den Dreieckskörper um seine Achse, so verändert sich sein Trägheitsmoment anscheinend nicht. Entsprechend sieht auch die zu zeichnende Grafik aus.



Anstatt der Ellipse beim Quader erhält man bei dem Dreieckskörper einen Kreis. Das besagt, daß die Massenverteilung des Dreieckes bei Drehung um den Schwerpunkt konstant bleibt. Auch bei diesem Körper kann ein ähnliches Bild herangezogen werden wie die Vierteilung beim Quader. Das Dreieck zerlege ich jedoch nicht in vier Teile, sondern in drei kleinere Dreiecke mit jeweils eigenem Schwerpunkt.



Die drei Schwerpunkte der Unterdreiecke liegen wiederum genau auf dem Kreis, der in der Grafik entstanden ist. Egal, wie man das Blatt dreht und wendet, die Massenverteilung bleibt homogen und damit das Trägheitsmoment konstant.

Meßwerte auf einen Blick

Da die Meßwerte auf den Zetteln, die während Ablauf des Praktikums beschrieben wurden ziemlich unübersichtlich sind, möchte ich an dieser Stelle die wichtigsten Meßwerte, die bislang nicht explizit im Text genannt wurden, kurz aufzählen.

Masse des Stabes ..... $m_0 = 126,4 \pm 0,1g$
Masse eines Gewichtes..... $m_s = 244,2 \pm 0,1g$
Länge des Stabes ..... $l_0 = 57,4 \pm 0,1cm$
Radius eines Gewichtes ..... $r_s = 1,75 \pm 0,1cm$
Höhe eines Gewichtes..... $H_s = 3,1 \pm 0,1cm$
Breite des Quaders ..... $B_Q = 7,2 \pm 0,1cm$
Höhe des Quaders ..... $H_Q = 15,3 \pm 0,1cm$
Kantenlänge des Dreieckskörpers..... $a_D = b_D = c_D = 20,3 \pm 0,1cm$