Aufgaben zur Fehlerrechnung

1. Eindimensionale Häufigkeitsverteilung

Tag	Mo	Di	Mi	Do	Fr
N_S	98	28	76	98	45

1.1. Mittelwert

$$\langle N_s \rangle = \frac{\sum N_s}{n} = \frac{345}{5} = 69$$

1.2. Standardabweichung der Einzelmessung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}$$
$$\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{4}3988} \approx 31,6$$

1.3. Standardabweichung des Mittelwertes

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 14,2$$

1.4. Relativer Fehler des Mittelwertes

$$f_r = \frac{m}{\langle x \rangle} \approx 0,22$$

1.5. Größenangaben

Die mittlere tägliche Studentenzahl beträgt 69. Die mittlere tägliche Studentenzahl mit absolutem Fehler beträgt $N_s = 69 \pm 15$. Die mittlere tägliche Studentenzahl mit relativem Fehler beträgt $N_s = 69\left(1 \pm 0,22\right)$. Und schließlich beträgt die mittlere tägliche Studentenzahl mit prozentualem Fehler $N_s = 69 \pm 0,22 \cdot 100\%$.

2. Zweidimensionale Häufigkeitsverteilung

x	0	1	2	3
y	1	2	3	4

$\sum x = 6 \qquad \sum y = 10 \qquad \sum xy = 20 \qquad \sum x^2 = 14 \qquad \sum y^2 = 30 \qquad \eta = 4$

$$\alpha = \frac{\sum x_i \sum y_i - n\sum x_i y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - n\sum x_i^2} = \frac{-20}{-20} = 1 \qquad \beta = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum y_i \sum x_i^2}{\left(\sum x_i\right)^2 - n\sum x_i^2} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum\left(\alpha x_i + \beta - y_i\right)^2}{n-2}} = 0 \qquad \sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0 \quad (\text{wg. } \sigma_y = 0)$$

Die beiden letzten Werte sind ein Maß für die Standard*abweichung* von Steigung bzw. y-Achsenabschnitt. Mit anderen Worten sind sie ein Maß für die Ungenauigkeit der ganzen Messung. In diesem Falle allerdings läßt sich durch die 4 Meßpunkte eine ideale Gerade ziehen, die von jedem einzelnen Meßpunkt den Abstand 0 hat.
Daher ist es nur einleuchtend, daß auch eine auf diese Weise berechnete Ungenauigkeit den Wert 0 hat.

3. Fehlerfortpflanzung

3.1. Drehwinkel einer optisch aktiven Substanz

Die partiellen Ableitungen sind $\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0} = 1$ und $\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_p} = -1$. Hierbei handelt es sich um den Spezialfall I, weshalb gilt:

$$m_\alpha = \sqrt{\left(1m_{\alpha_0}\right)^2 + \left(-1m_{\alpha_p}\right)^2} = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + m_{\alpha_p}^2}$$

3.2. Relaxationszeit

Die partielle Ableitung ist $\frac{\partial\tau}{\partial\kappa} = -\frac{1}{\kappa^2}$. In diesem Fall kann ich den Spezialfall II betrachten ...

$$\frac{\sigma_\tau}{\tau} = \sqrt{\left(-1\frac{\sigma_\kappa}{\kappa}\right)^2} = \frac{\sigma_\kappa}{\kappa}$$

3.3. Abbildung mit Linsen

Aus $f = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ folgen die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{a^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{1}{1+2\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^2} = \frac{b^2}{(a+b)^2} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{b^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzugssatzes erhalte ich

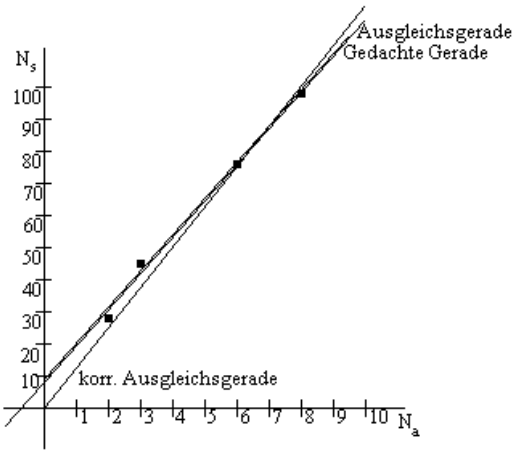
$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{b^2}{(\Delta a + b)^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{(a+\Delta b)^2}\right)^2}$$

4. Zweidimensionale Häufigkeitsverteilung II

Tag	Mo	Di	Mi	Do	Fr
N_a	8	2	6	8	3

4.1. Zeichnung

Bei Betrachtung der Zeichnung deutet sich ein linearer Zusammenhang zwischen der Anzahl der Assistenten und der Anzahl der Studenten deutlich an.



4.2. Werte

Für die Ausgleichsgerade erhalte ich folgende Werte:

$\alpha = 11,28 \qquad \beta = 8.08$

$\sigma_\alpha = 0,43 \qquad \sigma_\beta = 2,52$

4.3. Zuwächse

Da ich an dieser Stelle merke, daß ich in der Grafik die beiden Achsen vertauscht habe, merke ich hier zunächst an, daß ich nun den Zuwachs an Assistenten pro einem Studenten berechne. Damit beträgt der Absolutwert von $\gamma \approx 0,089$. Nach Aufgabe 3b gilt $\frac{m_\gamma}{\gamma} = \frac{m_\alpha}{\alpha}$.

Hierfür benötige ich zunächst den Wert $m_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0,189$, woraus $m_\gamma = \frac{0,189}{11,29} \cdot 0,089 \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$ folgt. Um es nochmal auszuschreiben: $\gamma = (89 \pm 1,5) \cdot 10^{-3} = 89 \cdot 10^{-3} \pm 2\%$

Die mittlere Studentenanzahl pro Assistent ist natürlich $\frac{\sum N_s}{\sum N_A} = \frac{345}{27} \approx 13$, doch in meinem Falle berechne ich lieber die mittlere Assistentenzahl pro Student, welche demnach $\frac{27}{345} \approx 0,078$ beträgt. Das sagt uns, daß im Mittel weniger Assistenten pro Student weniger zur Verfügung stehen als rechnerisch (d.h. im ausgeglichenen Falle) zur Verfügung stehen müßten. Das wiederum sagt mir als Student, daß ich mit meinen Problemen ziemlich allein stehe.

4.4. Für Physikstudenten?

Aus den gegebenen Bedingungen erhalte ich für den Fehler

$F = \sum (y_i - \alpha x_i)^2 = \sum (y_i^2 - 2\alpha x_i y_i + \alpha^2 x_i^2)$

Bestimmung des Minimums durch Differentiation:

$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \sum (2\alpha x_i^2 - 2 x_i y_i) = 2\alpha \sum x_i^2 - 2 \sum x_i y_i$

Setze ich diesen Differenzquotienten gleich Null, ergibt sich die korrigierte Steigung

$$\alpha = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{2215}{177} \approx 12,5$$

Daß es sich um ein Minimum handelt, sieht man sofort, wenn man sich die zweite Ableitung ansieht, die da lautet: $\frac{\partial F}{\partial^2 \alpha} = 2 \sum x_i^2$ und immer positiv ist.

Aufgrund meiner Vertauschung von x- und y- Werten ergibt sich bei mir natürlich der reziproke Wert dessen, was sich eigentlich ergeben sollte.