6. Übung zur
Konstruktion fehlerfreier Software

Frank Pilhofer

Montag 13-14 Uhr

0. Umfassende Vorbedingungen

0.0. $\{?\}z := z + x\{z \le \max\}$

$\{V\} = \{z \le \max - x\}$ (Z1)

0.1. $\{?\}x := z - y\{x - y > 0\}$

$\{V\} = \{z - 2y > 0\}$ (Z1)

0.2. $\{?\}x := z - y\{y - x > 0\}$

$\{V\} = \{2y - z > 0\}$ (Z1)

0.3. $\{?\}x := 5 - z\{wy - 2w^2 < z\}$

$\{V\} = \{wy - 2w^2 < z\}$ (Z1)

0.4. $\{?\}sum := sum + z\{sum = x + y + z\}$

$\{V\} = \{sum = x + y\}$ (Z1)

0.5. $\{?\}y(m) := z\{y(m) = y(n)\}$

$\{V\} = \{m = n \vee z = y(n)\}$ (Z1)

0.6. $\{?\}d(j) := a(k)\{\wedge_{i=1}^{j-1} d(i) \le d(i+1)\}$

$\{V\} = \{j \le 1 \vee (\wedge_{i=1}^{j-2} d(i) \le d(i+1) \wedge d(j-1) \le a(k))\}$ (Z1)

0.7. $\{?\}$ if $x < 0$ then $y := -x$ else $y := x$ endif $\{y > 0\}$

Es ist $\{x < 0\}y := -x\{y > 0\}$ und $\{x > 0\}y := x\{y > 0\}$, deshalb mit (F2)

$\{V\}$ = $\{x < 0$ und $x < 0$ oder $x > 0$ und $x \ge 0\}$

= $\{x < 0$ oder $x > 0\}$.

0.8. $\{?\}$ if $x < 0$ then $y := -x$ else $y := x$ endif $\{y \ge 0\}$

Es ist $\{x \le 0\}y := -x\{y \ge 0\}$ und $\{x \ge 0\}y := x\{y \ge 0\}$, deshalb mit (F2)

$\{V\}$ = $\{x \le 0$ und $x < 0$ oder $x \ge 0$ und $x \ge 0\}$

= $\{x < 0$ oder $x \ge 0\}$

= D.

0.9. $\{?\}$ if $x<0$ then $y:=-x$ else $y:=x$ endif $\{y<0\}$

Es ist $\{x>0\}y:=-x\{y<0\}$ und $\{x<0\}y:=x\{y<0\}$, deshalb mit (F2)

$\{V\}$ = $\{x>0 \text{ und } x<0 \text{ oder } x<0 \text{ und } x\geq 0\}$

= $\{\varnothing\}$.

0.10. $\{?\}$ if $x<0$ then $y:=-x$ else $y:=x$ endif $\{y\leq 0\}$

Es ist $\{x\geq 0\}y:=-x\{y\leq 0\}$ und $\{x\leq 0\}y:=x\{y\leq 0\}$, deshalb mit (F2)

$\{V\}$ = $\{x\geq 0 \text{ und } x<0 \text{ oder } x\leq 0 \text{ und } x\geq 0\}$

= $\{falsch \text{ oder } x=0\}$

= $\{x=0\}$.

0.11. $\{?\}$ if $x<0$ then $y:=-x$ else $y:=x$ endif $\{2\leq y\leq 4\}$

Es ist $\{-4\leq x\leq -2\}y:=-x\{2\leq y\leq 4\}$ und $\{2\leq x\leq 4\}y:=x\{2\leq y\leq 4\}$;
deshalb mit (F2):

$\{V\}$ = $\{-4\leq x\leq -2 \text{ und } x<0 \text{ oder } 2\leq x\leq 4 \text{ und } x\geq 0\}$

= $\{-4\leq x\leq -2 \text{ oder } 2\leq x\leq 4\}$

0.12. $\{?\}$ if $x<0$ then $y:=x$ else $y:=x-2$ endif $\{-1\leq y\leq 4\}$

Es ist $\{-1\leq x\leq 4\}y:=x\{-1\leq y\leq 4\}$ und $\{1\leq x\leq 6\}y:=x-2\{-1\leq y\leq 4\}$;
deshalb mit (F2):

$\{V\}$ = $\{-1\leq x\leq 4 \text{ und } x<0 \text{ oder } 1\leq x\leq 6 \text{ und } x\geq 0\}$

= $\{-1\leq x<0 \text{ oder } 1\leq x\leq 6\}$

0.13. $\{?\}(i:=i+1, sum:=sum+x(i))\left\{sum=\sum_{j=1}^{i}x(j) \text{ und } i\leq n \text{ und } i,n\in Z\right\}$

Es ist $\left\{sum=\sum_{j=1}^{i-1}x(j)\wedge i\leq n\wedge i,n\in Z\right\}(sum:=sum+x(i))\left\{sum=\sum_{j=1}^{i}x(j)\wedge i\leq n\wedge i,n\in Z\right\}$

und $\left\{sum=\sum_{j=1}^{i}x(j)\wedge i\leq n-1\wedge i,n\in Z\right\}(i:=i+1)\left\{sum=\sum_{j=1}^{i-1}x(j)\wedge i\leq n\wedge i,n\in Z\right\}$

Deshalb folgt mit (F1):

$\{V\}$ = $\left\{sum=\sum_{j=1}^{i}x(j)\wedge i\leq n-1\wedge i,n\in Z\right\}$

0.14. $\{?\}\begin{pmatrix} x(gl) :=: x(gr) \\ gr := gr-1 \\ gl := gl-1 \end{pmatrix}\left\{\begin{array}{c} gl < gr \le ig \\ \bigwedge_{i=gl+1}^{gr} x(i) = x(gr) \\ \bigwedge_{i=gr+1}^{ig} x(gr) < x(i) \end{array}\right\}$

Es ist $\left\{\begin{array}{c} gl < gr+1 \le ig+1 \\ \bigwedge_{i=gl}^{gr} x(i) = x(gr) \\ \bigwedge_{i=gr+1}^{ig} x(gr) < x(i) \end{array}\right\}(gl := gl-1)\left\{\begin{array}{c} gl < gr \le ig \\ \bigwedge_{i=gl+1}^{gr} x(i) = x(gr) \\ \bigwedge_{i=gr+1}^{ig} x(gr) < x(i) \end{array}\right\}$

und $\left\{\begin{array}{c} gl < gr \le ig+1 \\ \bigwedge_{i=gl}^{gr-1} x(i) = x(gr-1) \\ \bigwedge_{i=gr}^{ig} x(gr-1) < x(i) \end{array}\right\}(gr := gr-1)\left\{\begin{array}{c} gl < gr+1 \le ig+1 \\ \bigwedge_{i=gl}^{gr} x(i) = x(gr) \\ \bigwedge_{i=gr+1}^{ig} x(gr) < x(i) \end{array}\right\}$

und $\left\{\begin{array}{c} gl < gr \le ig+1 \\ \bigwedge_{i=gl+1}^{gr-1} x(i) = x(gr-1) \wedge x(gr) = x(gr-1) \\ \bigwedge_{i=gr+1}^{ig} x(gr-1) < x(i) \wedge x(gl) > x(gr-1) \end{array}\right\}(x(gl) :=: x(gr))\left\{\begin{array}{c} gl < gr \le ig+1 \\ \bigwedge_{i=gl}^{gr-1} x(i) = x(gr-1) \\ \bigwedge_{i=gr}^{ig} x(gr-1) < x(i) \end{array}\right\}$

Also insgesamt:

$$\{V\} \quad = \quad \left\{\begin{array}{c} gl < gr \le ig+1 \\ \bigwedge_{i=gl+1}^{gr-1} x(i) = x(gr-1) \wedge x(gr) = x(gr-1) \\ \bigwedge_{i=gr+1}^{ig} x(gr-1) < x(i) \wedge x(gl) > x(gr-1) \end{array}\right\}$$

1. Beweisen der Aussagen

1.0. $\{V_1 \text{ und } B\}S_1\{P\} \text{ und } \{\text{nicht } B\}S_2\{P\} \quad \Rightarrow \quad \{V_1\} \text{ if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ endif } \{P\}$

$\{V_1\} \text{ if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ endif } \{P\}$

$\Leftarrow \quad \{V_1 \text{ und } B\}S_1\{P\} \text{ und } \{V_1 \text{ und nicht } B\}S_2\{P\}$ (IF1)

$\Leftarrow \quad \{V_1 \text{ und } B\}S_1\{P\} \text{ und } \{\text{nicht } B\}S_2\{P\}$ (B1)

1.1. $\{B\}S_1\{P\} \text{ und } \{V_2 \text{ und nicht } B\}S_2\{P\} \quad \Rightarrow \quad \{V_2\} \text{ if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ endif } \{P\}$

$\{V_2\} \text{ if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ endif } \{P\}$

$\Leftarrow \quad \{V_2 \text{ und } B\}S_1\{P\} \text{ und } \{V_2 \text{ und nicht } B\}S_2\{P\}$ (IF1)

$\Leftarrow \quad \{B\}S_1\{P\} \text{ und } \{V_2 \text{ und nicht } B\}S_2\{P\}$ (B1)

1.2. $\{V_1\}S_1\{P\} \text{ und } \{V_2\}S_2\{P\} \quad \Rightarrow \quad \{V_1 \text{ und } V_2\} \text{ if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ endif } \{P\}$

$\{V_1 \text{ und } V_2\} \text{ if } B \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ endif } \{P\}$

$\Leftarrow \quad \{V_1 \text{ und } V_2 \text{ und } B\}S_1\{P\} \text{ und } \{V_1 \text{ und } V_2 \text{ und nicht } B\}S_2\{P\}$ (IF1)

$\Leftarrow \quad \{V_1\}S_1\{P\} \text{ und } \{V_1\}S_2\{P\}$ (B1)