2. Übung zur
Konstruktion fehlerfreier Software

Frank Pilhofer

Montag 13-14 Uhr

0. Boolesche Funktionen

Die Funktion *F* kann definiert werden als $F = B \text{ und } C \text{ oder nicht } B \text{ und } D$.
Beweis:
falls $B = wahr$, so kann *F* reduziert werden zu $F = wahr \text{ und } C \text{ oder } falsch \text{ und } D = C$.
falls $B = falsch$, so kann *F* reduziert werden zu $F = falsch \text{ und } C \text{ oder } wahr \text{ und } D = D$.

1. Vereinfachungen

1.0 $X(Y \Rightarrow Z)$

$$\begin{aligned} X(Y \Rightarrow Z) &= X\left(\overline{Y} + Z\right) \\ &= X\overline{Y} + XZ \end{aligned}$$

1.1 $X + (Y \Rightarrow Z)$

$$\begin{aligned} X + (Y \Rightarrow Z) &= X + \left(\overline{Y} + Z\right) \\ &= X + \overline{Y} + Z \end{aligned}$$

1.2. $XY \Rightarrow Z$

$$\begin{aligned} XY \Rightarrow Z &= \overline{XY} + Z \\ &= \overline{X} + \overline{Y} + Z \end{aligned}$$

1.3. $(X + Y) \Rightarrow Z$

$$\begin{aligned} (X + Y) \Rightarrow Z &= \overline{(X + Y)} + Z \\ &= \overline{X} \cdot \overline{Y} + Z \end{aligned}$$

1.4 $(-x > 0 \wedge x < 0) \vee \left(x > 0 \wedge \neg(x < 0)\right)$

$$\begin{aligned} (-x > 0 \wedge x < 0) \vee \left(x > 0 \wedge \neg(x < 0)\right) &= (x < 0 \wedge x < 0) \vee (x > 0 \wedge x \geq 0) \\ &= (x < 0) \vee (x > 0) \\ &= x \neq 0 \end{aligned}$$

1.5 $(-x \geq 0 \wedge x < 0) \vee \left(x \geq 0 \wedge \neg(x < 0)\right)$

$$\begin{aligned} (-x \geq 0 \wedge x < 0) \vee \left(x \geq 0 \wedge \neg(x < 0)\right) &= (x \leq 0 \wedge x < 0) \vee (x \geq 0 \wedge x \geq 0) \\ &= (x < 0) \vee (x \geq 0) \\ &= wahr \end{aligned}$$

1.6 $(-x<0 \wedge x<0) \vee (x<0 \wedge \neg(x<0))$

$$\begin{aligned}(-x<0 \wedge x<0) \vee (x<0 \wedge \neg(x<0)) &= (x>0 \wedge x<0) \vee (x<0 \wedge x \geq 0)\\ &= (falsch) \vee (falsch)\\ &= falsch\end{aligned}$$

1.7 $(-x \leq 0 \wedge x<0) \vee (x \leq 0 \wedge \neg(x<0))$

$$\begin{aligned}(-x \leq 0 \wedge x<0) \vee (x \leq 0 \wedge \neg(x<0)) &= (x \geq 0 \wedge x<0) \vee (x \leq 0 \wedge x \geq 0)\\ &= (falsch) \vee (x=0)\\ &= x=0\end{aligned}$$

1.8 $(w+x)(y+z)$

$$(w+x)(y+z) = wy+wz+xy+xz$$

1.9 $\left[i_a \leq n_a \text{ oder } i_b \leq n_b\right] \text{und} \left[i_b > n_b \text{ oder} \left(i_a \leq n_a \text{ und } A(i_a) \leq A(i_b)\right)\right]$

$$\begin{aligned}&= \left(i_a \leq n_a \text{ und } i_b > n_b\right) \text{oder} \left(i_a \leq n_a \text{ und } i_a \leq n_a \text{ und } A(i_a) \leq B(i_b)\right) \text{oder}\\ &\quad \left(i_b \leq n_b \text{ und } i_b > n_b\right) \text{oder} \left(i_b \leq n_b \text{ und } i_a \leq n_a \text{ und } A(i_a) \leq B(i_b)\right)\\ &= \left(i_a \leq n_a \text{ und } i_b > n_b\right) \text{oder} \left(i_a \leq n_a \text{ und } A(i_a) \leq B(i_b)\right) \text{oder}\\ &\quad \left(i_b \leq n_b \text{ und } i_a \leq n_a \text{ und } A(i_a) \leq B(i_b)\right)\\ &= i_a \leq n_a \text{ und} \left[i_b > n_b \text{ oder } A(i_a) \leq B(i_b)\right]\end{aligned}$$

1.10 $\left[i_a \leq n_a \text{ oder } i_b \leq n_b\right] \text{und} \left[i_b > n_b \text{oder} \left(i_a \leq n_a \text{und} i_b \leq n_b \text{und} A(i_a) \leq B(i_b)\right)\right]$

$$\begin{aligned}&= \left(i_a \leq n_a \text{ und } i_b > n_b\right) \text{oder} \left(i_a \leq n_a \text{ und } i_a \leq n_a \text{und} i_b \leq n_b \text{und} A(i_a) \leq B(i_b)\right) \text{oder}\\ &\quad \left(i_b \leq n_b \text{ und } i_b > n_b\right) \text{oder} \left(i_b \leq n_b \text{ und } i_a \leq n_a \text{und} i_b \leq n_b \text{und} A(i_a) \leq B(i_b)\right)\\ &= \left(i_a \leq n_a \text{ und } i_b > n_b\right) \text{oder} \left(i_a \leq n_a \text{und} i_b \leq n_b \text{und} A(i_a) \leq B(i_b)\right) \text{oder}\\ &\quad \left(i_a \leq n_a \text{und} i_b \leq n_b \text{und} A(i_a) \leq B(i_b)\right)\\ &= \left(i_a \leq n_a \text{ und } i_b > n_b\right) \text{oder} \left(i_a \leq n_a \text{und} i_b \leq n_b \text{und} A(i_a) \leq B(i_b)\right)\\ &= i_a \leq n_a \text{ und} \left[i_b > n_b \text{oder} \left(i_b \leq n_b \text{und} A(i_a) \leq B(i_b)\right)\right]\\ &= i_a \leq n_a \text{ und} \left[\left(i_b > n_b \text{oder} i_b \leq n_b\right) \text{und} \left(i_b > n_b \text{oder} A(i_a) \leq B(i_b)\right)\right]\\ &= i_a \leq n_a \text{ und} \left(i_b > n_b \text{oder} A(i_a) \leq B(i_b)\right)\end{aligned}$$

1.11 $\text{nicht}\left(i_b > n_b \text{oder}\left(i_a \le n_a \text{und} A(i_a) \le B(i_b)\right)\right)$

$$= \quad i_b \le n_b \text{und}\left(i_a > n_a \text{oder} A(i_a) > B(i_b)\right)$$
$$= \quad i_b \le n_b \text{und} i_a > n_a \text{oder} i_b \le n_b \text{und} A(i_a) > B(i_b)$$

2. Zeigen Sie, daß ...

Der Beweis wird geführt, in dem die Bedingung $i_a \le n_a \text{oder} i_b \le n_b$ auf die linke Seite multipliziert wird; anschließend wird die linke Seite zur rechten Seite hin umgeformt. Durch die Multiplikation "beschränkt" sich die Rechnung auf die gewünschten Fälle.

$$\left\{\text{nicht}\left(i_a \le n_a \text{und}\left(i_b > n_b \text{oder} A(i_a) \le B(i_b)\right)\right)\right\}\left(i_a \le n_a \text{oder} i_b \le n_b\right)$$

$$= \quad \left(i_a > n_a \text{oder}\left(i_b \le n_b \text{und} A(i_a) > B(i_b)\right)\right)\left(i_a \le n_a \text{oder} i_b \le n_b\right)$$

$$= \quad \begin{array}{l} \left(i_a > n_a \text{und}\left(i_a \le n_a \text{oder} i_b \le n_b\right)\right)\text{oder} \\ \left(i_b \le n_b \text{und} A(i_a) > B(i_b) \text{und}\left(i_a \le n_a \text{oder} i_b \le n_b\right)\right) \end{array}$$

$$= \quad \begin{array}{l} i_a > n_a \text{und} i_a \le n_a \text{oder} i_a > n_a \text{und} i_b \le n_b \text{oder} \\ i_a \le n_a \text{und} i_b \le n_b \text{und} A(i_a) > B(i_b) \text{oder} i_b \le n_b \text{und} A(i_a) > B(i_b) \text{und} i_b \le n_b \end{array}$$

$$= \quad \begin{array}{l} i_a > n_a \text{und} i_b \le n_b \text{oder} \\ i_a \le n_a \text{und} i_b \le n_b \text{und} A(i_a) > B(i_b) \text{oder} i_b \le n_b \text{und} A(i_a) > B(i_b) \end{array}$$

$$= \quad i_b \le n_b \text{und}\left(i_a > n_a \text{oder} i_a \le n_a \text{und} A(i_a) > B(i_b) \text{oder} A(i_a) > B(i_b)\right)$$
$$= \quad i_b \le n_b \text{und}\left(i_a > n_a \text{oder} A(i_a) > B(i_b)\right)$$

$\Diamond$

Bemerkung: Sei $x \mathrel{\hat{=}} i_a \le n_a$; $y \mathrel{\hat{=}} i_b \le n_b$; $z \mathrel{\hat{=}} A(i_a) \le B(i_b)$

$$\overline{x(\bar{y}+z)}(x+y) = (\bar{x}+y\bar{z})(x+y) = x\bar{x} + \bar{x}y + xy\bar{z} + y\bar{z} = y(\bar{x} + x\bar{z} + \bar{z}) = y(\bar{x}+\bar{z})$$